Université de Marne la Vallée
M1 ET

Traitement du Signal
TP N° 2

Ce TP s'inscrit dans le prolongement du précédent. Il vous est conseillé de conserver les programmes écrits à l'occasion de ce deuxième TP en vue de la prochaine séance.

Les phrases en italique correspondent à des questions qui doivent être préparées avant la séance de TP.

1 Prédiction d'un signal musical de flute

Bien souvent, pour des signaux réels, la prédiction linéaire d'ordre 2 s'avère insuffisante et on recourt donc à des prédicteurs d'ordres plus élevés.

Soit $X(n)$ un signal aléatoire stationnaire au sens faible de fonction d'autocorrélation $\gamma_X(k)$. La prédiction linéaire d'ordre $L \in \mathbb{N}^*$ de ce signal consiste à déterminer des coefficients réels $h_L(1), \ldots, h_L(L)$ qui rendent minimale

$$\mathcal{E}(\mathbf{h}_L) = \mathrm{E}\{[X(n) - h_L(1)X(n-1) - \cdots - h_L(L)X(n-L)]^2\}.$$

La matrice d'autocorrélation

$$\Gamma_L = \begin{bmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \ldots & \ldots & \gamma_X(L-1) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \gamma_X(1) \\ \gamma_X(L-1) & \ldots & \ldots & \gamma_X(1) & \gamma_X(0) \end{bmatrix}$$

joue un rôle important dans la détermination du vecteur $\mathbf{h}_L = [h_L(1) \ldots h_L(L)]^T$. On peut noter que cette matrice est de Tœplitz, ce qui signifie que ses éléments sont égaux sur chacune de ses diagonales. Cette propriété permet de générer facilement Γ_L à l'aide de la fonction toeplitz de Scilab. On peut montrer que, si Γ_L est inversible, la solution $\mathbf{h}_L$ du problème de minimisation de $\mathcal{E}(\mathbf{h}_L)$ est donnée par

$$\mathbf{h}_L = \Gamma_L^{-1}\mathbf{c}_L$$

où $\mathbf{c}_L = [\gamma_X(1) \ldots \gamma_X(L)]^T$.

Démontrez cette formule dans le cas où $L = 4$.

Chargez l'enregistrement de son de flute stocké dans le fichier flute.dat et calculez $\mathbf{h}_L$ à l'aide de Scilab pour $L = 1, 2, 3, 4, 5$. Calculez dans chaque cas la valeur $\mathcal{E}(\mathbf{h}_L)$ de l'erreur quadratique moyenne de prédiction.

La façon dont $\mathcal{E}(\mathbf{h}_L)$ varie en fonction de L vous paraît-elle logique ?

Déterminez aussi des estimations des paramètres d_X et d_Z qui sont tels que

$$\begin{aligned} P[|X(n)| < d_X] &= 0.95 \\ P[|Z(n)| < d_Z] &= 0.95 \end{aligned}$$

où $Z(n) = X(n) - h_L(1)X(n-1) - \cdots - h_L(L)X(n-L)$ désigne l'erreur de prédiction. (On pourra utiliser la fonction sort de Scilab.) Ces paramètres permettent d'avoir une bonne idée des dynamiques respectives des signaux $X(n)$ et $Z(n)$.

2 Compression MICD du signal de flute

Pour réaliser la compression d'un signal numérique sonore, on peut employer une méthode prédictive qui exploite les techniques vues à la question précédente. Cette méthode est basée sur le fait que le signal $Z(n)$ est de puissance plus faible que le signal $X(n)$ et qu'il peut être quantifié sur un nombre réduit Q de niveaux de quantification. Le signal peut alors être re-synthétisé à partir de cette erreur de prédiction quantifiée.

Le *codeur* qui effectue la compression effectue les calculs suivants :

- **initialisation** pour $n = 1, \ldots, L$, $\tilde{X}(n) = X(n)$
- **itérations** pour $n = L + 1, \ldots$

$$\hat{X}(n) = h_L(1)\tilde{X}(n-1) + \cdots + h_L(L)\tilde{X}(n-L) \tag{1}$$

$$\tilde{Z}(n) = X(n) - \hat{X}(n) \tag{2}$$

$$\bar{Z}(n) = \mathcal{Q}[\tilde{Z}(n)]$$

$$\tilde{X}(n) = \hat{X}(n) + \bar{Z}(n) \tag{3}$$

Il suffit donc de stocker $\bar{Z}(n)$ et les coefficients $h_L(1), \ldots, h_L(L)$ pour être à même de reconstruire le signal $\tilde{X}(n)$ à l'aide d'un *décodeur* mettant en œuvre les équations (1), (2) et (3). Pour mémoriser chaque échantillon de parole, il n'est plus nécessaire que d'employer $q \leq \log_2(Q)$ bits. Si chaque échantillon de départ est codé sur b bits, il en résulte un taux de compression $T = b/q$ (généralement $b = 16$ bits).

L'inconvénient de cette méthode est cependant d'introduire une perte de qualité (ou *distorsion*) due à la quantification de $\tilde{Z}(n)$. Dans la pratique, on établit le choix des caractéristiques du système de compression de sorte que cette distorsion soit aussi peu audible que possible. Cette dernière vaut :

$$D = \mathrm{E}\{[X(n) - \tilde{X}(n)]^2\}.$$

Montrer que la distorsion est aussi égale à l'erreur de quantification de $\tilde{Z}(n)$*,* $\mathrm{E}\{[\tilde{Z}(n) - \bar{Z}(n)]^2\}$.

Appliquer l'algorithme de compression décrit ci-dessus au signal de son de flute. On choisira $L = 3$ et $Q = 5$. La quantification se fera à l'aide du programme `quantu` qui vous est également fourni. Celui-ci réalise une quantification uniforme de l'entrée passée en argument, connaissant les bornes inférieure et supérieure de sa plage de variation. On pourra ici fixer ses valeurs à $-d_Z$ et d_Z, d_Z étant le paramètre déterminé à la fin de la première partie.

Evaluez numériquement la distorsion obtenue. Comparez cette valeur à celle qui aurait résulté d'une quantification directe (avec le même nombre de niveaux de quantification) du signal $X(n)$ (méthode PCM).