*NOM :*

*L3 SM*
*2009 - 2010*

# Examen de Bases du traitement du Signal

- *La durée de cette épreuve est de 45 mn.*
- *L'usage des documents, des notes personnelles des étudiants ainsi que de tout type de dispositifs électroniques n'est pas autorisé.*
- *L'examen devra impérativement être traité sur cette feuille.*
- *Chaque question peut avoir une, plusieurs ou aucune réponse(s) correcte(s) parmi les choix proposés.*

1. La transformée de Fourier d'un signal à temps discret est définie si ce signal appartient à
   |__| $\ell^1(\mathbb{Z})$
   |__| $\ell^2(\mathbb{Z})$
   |__| $\ell^1(\mathbb{Z}) \cap \ell^2(\mathbb{Z})$
   |__| l'espace des suites bornées.

2. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ le signal à temps discret résultant du produit de convolution des signaux à temps discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, tous deux dans $\ell^1(\mathbb{Z})$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
   |__| $c_k = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_{n-k}$.
   |__| $c_k = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_{k-n}$.
   |__| $c_k = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{n-k} y_n$.
   |__| $c_k = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{k-n} y_n$.

3. On considère les deux signaux à temps discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définis par
$$x_n = \begin{cases} \alpha^n & \text{si} \quad n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad y_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   où $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Calculer la convolution discrète de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

4. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les signaux définis à la question précédente.
   |__| Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est causal.
   |__| Le signal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est causal.
   |__| Le produit de convolution de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est causal.
   |__| Le signal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$.

5. Un signal à temps discret causal a pour TZ, $X(z) = \frac{1}{(2z-1)(z-1)}$.
   |__| Plusieurs domaines de définition sont possibles pour $X(z)$.
   |__| Cette TZ est définie sur le domaine $\{z \in \mathbb{C} | \, |z| > 1\}$.
   |__| Cette TZ est définie sur le domaine $\{z \in \mathbb{C} | \, |z| < \frac{1}{2}\}$.
   |__| Cette TZ est définie sur le domaine $\{z \in \mathbb{C} | \, |z| > 2\}$
6. Donner l'expression du signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à temps discret causal ayant pour TZ, $X(z) = \frac{1}{(2z-1)(z-1)}$.

   $x_n =$

7. Soit $(x_n)_{0\leq n\leq N-1}$ un signal de durée finie de $N \in \mathbb{N}^*$ échantillons et soit $(X_k)_{0\leq k\leq N-1}$ sa Transformée de Fourier Discrète. Comment s'exprime la relation de conservation d'energie entre $(x_n)_{0\leq n\leq N-1}$ et $(X_k)_{0\leq k\leq N-1}$ ?

8. Le filtre numérique causal qui associe, à toute entrée $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, une sortie $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $y_n = x_n + 2x_{n-1} + 3x_{n-2} - 2x_{n-3} - x_{n-4}$,
   |__| est un filtre RIF.
   |__| est un filtre RII.
   |__| est stable.
   |__| est un filtre à phase linéaire, de temps de propagation de groupe égal à 2.
9. Soit $(x_n)_{0\leq n\leq 2}$ un signal de durée finie défini par

   $$x_0 = \frac{1}{3} \qquad x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{3} \,.$$

   Sa Transformée de Fourier Discrète $(X_k)_{0\leq k\leq 2}$ est donnée par

   $$X_0 = \qquad X_1 = \qquad X_2 =$$

10. Soient $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique stable et $H(z)$ sa fonction de transfert. On met en entrée de ce filtre un signal à temps discret stable $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Si l'on met le signal de sortie de ce filtre en entrée d'un second filtre stable dont la réponse impulsionnelle est égale à $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on obtient à la sortie de ce dernier un signal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
    |__| Le signal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stable.
    |__| La TZ de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donnée par $Y(z) = (H(z) + G(z))X(z)$, où $G(z)$ est la TZ de $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
    |__| La TZ de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donnée par $Y(z) = H(z)G(z)X(z)$, où $G(z)$ est la TZ de $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
    |__| Le signal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est défini par $y_n = h_n * x_n * g_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.