Bases du Signal

TD N° 1

Exercice 1

1. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Quel signal obtient-on en échantillonnant le signal analogique

$$x(t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

aux périodes suivantes : T, $\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{4}$?

2. Les trois signaux à temps discret ainsi obtenus sont-ils périodiques ? Le cas échéant préciser leur période. Ces signaux appartiennent-ils à $\ell^2(\mathbb{Z})$? à $\ell^1(\mathbb{Z})$?

Exercice 2
On définit $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ l'espace des fonctions périodiques de période 1, sommables sur une période. Montrer que $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Exercice 3
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un signal à temps discret d'énergie finie. On considère les composantes polyphase d'ordre M de ce signal, qui sont définies, pour tout $k \in \{0, \ldots, M-1\}$, par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad x_n^{(k)} = x_{nM+k}.$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, M-1\}$, $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$.
2. Exprimer $\widehat{x}(f)$, la TF de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, en fonction des TF des composantes polyphase $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$.
3. Pour $k \in \{0, \ldots, M-1\}$, que vaut

$$\sum_{p=0}^{M-1} e^{\imath 2\pi k(f+\frac{p}{M})}\, \widehat{x}(f + \frac{p}{M}) \qquad ?$$

4. En déduire la TF de chacune des composantes polyphase $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$, pour $k \in \{0, \ldots, M-1\}$.