Bases du Signal

TD N° 2

Exercice 1

On considère le signal à temps discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$x_n = \begin{cases} \alpha^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Quand cette opération peut être définie, calculer la convolution discrète de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec les signaux suivant :

1. $\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon}\,; \end{cases}$
2. $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon}\,; \end{cases}$
3. $y_n = \begin{cases} \beta^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   où $\beta \in \mathbb{C}^*$;
4. $z_n = \begin{cases} \beta^n & \text{si } n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   où $\beta \in \mathbb{C}^*$.

On précisera à chaque fois si les signaux traités/obtenus sont causaux ou non.

Exercice 2

Un signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ réel, à temps discret, a pour TF $\widehat{x}(f)$ telle que

$$\widehat{x}(f) = \begin{cases} 2B & \text{si } 0 \leq f \leq B \\ 0 & \text{si } B < f \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

où $0 < B < 1/2$.

1. Ces données suffisent-elles pour déterminer $\widehat{x}(f)$ pour tout $f \in \mathbb{R}$?
2. Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient-il à $\ell^1(\mathbb{Z})$? à $\ell^2(\mathbb{Z})$?
3. Donner l'expression de x_n pour $n \in \mathbb{Z}$.
4. Quand B tend vers $1/2$, quelle est la limite de x_n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$? Ce résultat était-il prévisible ?
5. Comment peut-on calculer simplement

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^2 \qquad ?$$