Université de Marne la Vallée
L3 SM

Bases du Signal

TD N° 5

Le but de cet exercice est d'étudier la transformée en Cosinus Discrète, très utilisée dans les algorithmes de compression d'images (normes JPEG, MPEG,...). Soit $(x_n)_{0\leq n\leq 2N-1}$ un signal de durée fini de $2N$ échantillons, $N \in \mathbb{N}^*$. On note $(X_k)_{0\leq k\leq 2N-1}$ sa Transformée de Fourier Discrète.

1. On suppose que $(x_n)_{0\leq n\leq 2N-1}$ est réel. Quelle relation de symétrie cela entraîne-t-il pour les coefficients X_k ?
2. On fait l'hypothèse supplémentaire que

$$\forall n \in \{0,\dots,2N-1\}, \qquad x_{2N-1-n} = x_n.$$

Montrer que cela nous permet d'écrire

$$\forall k \in \{0,\dots,N\}, \qquad \exp\Big(-\imath\frac{\pi k}{2N}\Big)X_k = A_k$$

où $A_k \in \mathbb{R}$.

3. Que vaut X_N ?
4. En déduire que $\forall n \in \{0,\dots,N-1\}$,

$$x_n = \frac{1}{N}\left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} A_k \cos\Big(\frac{\pi k}{N}\big(n+\frac{1}{2}\big)\Big)\right).$$

5. La transformée en Cosinus Discrète de $(x_n)_{0\leq n\leq N-1}$ est définie par les coefficients $(\widetilde{A}_k)_{0\leq k\leq N-1}$ tels que :

$$\widetilde{A}_k = \begin{cases} \dfrac{A_0}{2\sqrt{N}} & \text{si } k=0 \\ \dfrac{A_k}{\sqrt{2N}} & \text{si } k \in \{1,\dots,N-1\}. \end{cases}$$

Vérifiez que cette transformation conserve l'énergie du signal, en ce sens que :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{A}_k^2 \ .$$