Université de Marne la Vallée
L3 SM

Bases du Signal
TD N° 6

Exercice 1
Un filtre numérique a comme fonction de transfert

$$H(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} - z^{-3} - \frac{1}{2}z^{-4}.$$

1. Ce filtre est-il réel, causal, RIF, RII, stable, à phase linéaire ?
2. Quel est le temps de propagation du filtre ?
3. Etudier le module et la phase de sa réponse fréquentielle.

Exercice 2
On considère le filtre causal de fonction de transfert

$$H(z) = \frac{1}{(1-2z)(1-4z)}.$$

1. Etudier la stabilité de ce filtre.
2. Donner l'équation récursive permettant de calculer la sortie à partir de l'entrée.
3. Calculer la réponse fréquentielle du filtre.
4. Quelle est la réponse impulsionnelle de ce filtre ?

Exercice 3
1. Montrer que si z_0 est un zéro d'un filtre réel alors z_0^* est aussi un zéro.
2. On considère un filtre à phase linéaire, causal, de temps de propagation multiple de la demi-période d'échantillonnage. Montrer que, si $z_0 \neq 0$ est un zéro de ce filtre alors z_0^{-1} est aussi un zéro.
3. On sait que $1 + \jmath$ est un zéro d'un filtre réel à phase linéaire, causal, de temps de propagation multiple de la demi-période d'échantillonnage. L'ordre de ce filtre étant égale à 4, que peut-on en déduire quant à sa fonction de transfert ?

Exercice 4
On appelle *filtre passe-tout* un filtre de réponse fréquentielle constante.
1. Selon vous, quelle peut être l'utilité d'un tel filtre ?

2. On considère le filtre causal de fonction de transfert
$$H(z) = \frac{p_0^* - z^{-1}}{1 - p_0 z^{-1}}.$$
où $p_0 \neq 0$. Quels sont les zéros et les pôles de ce filtre ? A quelle condition est-il stable ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite de l'exercice.
3. Est-ce un filtre passe-tout ?
4. Plus généralement, en déduire une condition suffisante pour qu'un filtre soit passe-tout.

Exercice 5

On considère le filtre numérique causal d'entrée $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et de sortie $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dont la relation entrée-sortie est donnée par
$$y_n = x_n - 2x_{n-1} + 2x_{n-2} - \frac{1}{4}y_{n-2}.$$

1. Quelle est la fonction de transfert $H(z)$ de ce filtre ?
2. Le filtre est-t-il stable ?
3. On appelle *filtre à déphasage minimal*, un filtre causal stable, qui admet un inverse causal et stable. Le filtre précédent est-il à déphasage minimal ?
4. Montrer que $H(z) = \Phi(z)A(z)$ où $\Phi(z)$ est la fonction de transfert d'un filtre passe-tout telle que $\Phi(1) = 1$ et $A(z)$ est la fonction de transfert d'un filtre à déphasage minimal.
5. Comment s'interprète la factorisation précédente en termes de mise en œuvre du filtre ?