Université de Marne la Vallée
L3 SM

Traitement du Signal Déterministe

TD N° 2

1. On considère deux signaux à temps continu x et y défini sur $\mathbb{R}$, d'énergies finies. Montrer que, si ces signaux sont de supports bornés de longueurs respectives $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $T' \in \mathbb{R}_+^*$, i.e.

$$\exists t_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R},\ t < t_0 \text{ ou } t > t_0 + T \ \Rightarrow\ x(t) = 0$$
$$\exists t'_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R},\ t < t'_0 \text{ ou } t > t'_0 + T' \ \Rightarrow\ y(t) = 0$$

   alors la fonction d'intercorrélation γ_{xy}^{e} est aussi de support borné. (On précisera sa longueur et son "instant initial".)
   Quel résultat obtient-on, en particulier, pour l'autocorrélation γ_x^{e} ? Ce résultat vous paraît-il logique ?

2. On considère le signal impulsionnel

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Calculer son autocorrélation.

3. Cette impulsion est émise par un système de mesure sismique. Ce dernier reçoit un écho y correspondant à un phénomène de reflexion se produisant à l'interface entre deux couches de natures géologiques différentes. On suppose que le signal recueilli est de la forme

$$y(t) = \rho\, x(t - d) + b(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

   où $\rho \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ et b est un signal de perturbation parasite (bruit additif).
   Exprimer l'intercorrélation entre y et x en fonction de l'autocorrélation de x et de l'intercorrélation entre b et x.
   En déduire une technique permettant d'estimer d à partir de x et y quand $b(t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. On fait l'hypothèse que b est de forme sinusoïdale :

$$b(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

   où $A \in \mathbb{R}$ et $f_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer γ_{xb}^{e}. Que se passe-t-il dans le cas où $f_0 = p/T$ avec $p \in \mathbb{N}^*$?
   Donner un majorant $B(A, T, f_0)$ de $|\gamma_{xb}^{\mathrm{e}}(\tau)|$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$.

5. En déduire une borne maximale de l'erreur d'estimation de d par la méthode proposée à la question 3, quand le bruit n'est plus nul.