Université de Marne la Vallée
L3 SM

Traitement du Signal Déterministe

TD N° 5

1. Préliminaires
   (a) On considère le signal $x(t) = e^{\imath\delta \sin(t)}$ où $\delta \in \mathbb{R}$. Donner l'expression de ses coefficients de Fourier, qu'on notera $J_n(\delta)$, $n \in \mathbb{Z}$. (Notons qu'il n'est pas possible de trouver une forme explicite pour $J_n(\delta)$.).
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $J_n(\delta) \in \mathbb{R}$ et que
   $$J_n(-\delta) = J_{-n}(\delta) = (-1)^n J_n(\delta)$$
   (J_n est une fonction qu'on rencontre fréquemment dans les problèmes de physiques et qu'on appelle fonction de Bessel de première espèce, d'ordre n.)
   (c) Que vaut $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\delta)^2$?

2. Modulation de fréquence
   On cherche à moduler en fréquence un message $m(t)$ à l'aide d'une porteuse sinusoïdale $\cos(2\pi f_0 t)$ où $f_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Le signal modulé s'écrit :
   $$s(t) = \cos\varphi(t)$$
   où $\varphi(t) = 2\pi \displaystyle\int_0^t \nu(u)du$ et $\nu(t) = f_0 + k\,m(t)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$. Pour simplifier l'analyse on suppose que $m(t) = A\cos(2\pi f_m t)$, où $A \in \mathbb{R}$ et $f_m \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que $s(t) = \mathrm{Re}\{u(t)e^{\imath 2\pi f_0 t}\}$ où $u(t) = e^{\imath\delta \sin(2\pi f_m t)}$, δ étant une constante qu'on précisera ($|\delta|$ est appelé *indice de modulation*).
   (b) Développer $u(t)$ en série Fourier.
   (c) En déduire un développement en série trigonométrique de $s(t)$.
   (d) Donner une représentation graphique du spectre de $s(t)$. On pourra prendre $f_m \ll f_0$ et $\delta = 5$. (cf table ci-jointe).

3. Démodulation
   Au niveau du récepteur, on récupère le signal $r(t) = a(t)s(t)$ où $a(t)$ est une fonction réelle strictement positive qui correspond à des fluctuation d'amplitude introduites par le canal de communication.
   (a) Pour se prémunir de ces fluctuations, on écrête le signal en calculant
   $$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } r(t) \geq 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que $y(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos\big((2k+1)\varphi(t)\big)$ où $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite qu'on déterminera.

(b) En déduire qu'un filtrage passe-bas convenable permet approximativement de retrouver le signal $s(t)$.

(c) Que vaut $ds(t)/dt$?

(d) Proposer une chaîne de démodulation.

n	$J_n(5)$
0	-0.177596771314
1	-0.327579137591
2	0.046565116278
3	0.364831230614
4	0.391232360459
5	0.261140546120
6	0.131048731782
7	0.053376410156
8	0.018405216655
9	0.005520283139
10	0.001467802647