

Traitement du Signal Avancé

TD N° 2

Bornes de Cramer-Rao pour l'estimation d'une cisoïde dans du bruit

Achever le TD précédent, puis répondre aux questions suivantes.

1. Soit $\mathbf{x} = (a^R \ a^I \ \omega)^\top$. Montrer que

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \frac{\partial^2 \ln f_{\mathbf{Y}|a^R, a^I, \omega}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} -n & 0 & R'_n(\omega) \\ 0 & -n & I'_n(\omega) \\ R'_n(\omega) & I'_n(\omega) & a^R R''_n(\omega) + a^I I''_n(\omega) \end{bmatrix}.$$

où l'on rappelle que $R_n(\omega)$ et $I_n(\omega)$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de

$$Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^n y_k e^{-ik\omega}.$$

De la même façon, $R'_n(\omega)$ et $I'_n(\omega)$ (resp. $R''_n(\omega)$ et $I''_n(\omega)$) sont les parties réelle et imaginaire de $Y'_n(\omega)$ (resp. $Y''_n(\omega)$).

2. Donner les expressions de $Y'_n(\omega)$ et $Y''_n(\omega)$ en fonction de a , n , ω et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$.
3. Dans les expressions précédentes, quand on remplace le bruit $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ par le signal aléatoire $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ dont il est une réalisation, on obtient des variables aléatoires $Y'_n(\omega)$ et $Y''_n(\omega)$. Calculer $E[Y'_n(\omega)]$ et $E[Y''_n(\omega)]$. En déduire $E[R'_n(\omega)]$, $E[I'_n(\omega)]$, $E[R''_n(\omega)]$ et $E[I''_n(\omega)]$, $R'_n(\omega)$ et $I'_n(\omega)$ (resp. $R''_n(\omega)$ et $I''_n(\omega)$) étant les variables aléatoires correspondant aux parties réelle et imaginaire de $Y'_n(\omega)$ (resp. $Y''_n(\omega)$).
4. Déduire l'expression de la matrice d'information de Fisher dans le problème d'estimation de (a^R, a^I, ω) traité.
5. Calculer les termes diagonaux de l'inverse de la matrice d'information de Fisher.
6. Soit \hat{a} et $\hat{\omega}$ des estimateurs sans biais de a et ω . En utilisant le résultat de la question précédente, donner des bornes inférieures des erreurs quadratiques moyennes d'estimation $E[|\hat{a} - a|^2]$ et $E[(\hat{\omega} - \omega)^2]$. Quelle est l'influence des paramètres σ^2 , n et $|a|$?
7. A l'aide de `scilab`, pour différentes valeurs de n , a et ω , comparer les bornes de Cramer-Rao ainsi obtenues aux erreurs quadratiques moyennes d'estimation produites par l'estimateur du maximum de vraisemblance. Pour avoir des approximations numériques fiables de $E[|\hat{a}_{MV} - a|^2]$ et $E[(\hat{\omega}_{MV} - \omega)^2]$, il faut pour des valeurs fixées de n , a et ω moyenner les valeurs quadratiques des erreurs d'estimation relevées pour différentes réalisations du signal bruité.