Université de Marne la Vallée
M1 ET

Traitement du Signal Avancé

TD N° 3

Moindres carrés récursifs

On considère le modèle linéaire

$$y_k = \widetilde{\mathbf{h}}^\top \mathbf{x}_k + b_k, \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

où

- $\widetilde{\mathbf{h}}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$, qui n'est pas connu
- le scalaire y_k et le vecteur $\mathbf{x}_k$ sont des observations à valeurs réelles
- $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de perturbations inconnues correspondant à des réalisations d'un bruit aléatoire centré, stationnaire au sens large.

L'objectif de ce TD est de fournir une méthode permettant d'estimer récursivement $\widetilde{\mathbf{h}}$ à partir de $(y_k, \mathbf{x}_k)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que l'estimateur des moindres carrés *avec* facteur d'oubli de $\widetilde{\mathbf{h}}$, à partir de $(y_k, \mathbf{x}_k)_{1\le k\le n}$, est donné par

$$\mathbf{h}_n = \mathbf{\Gamma}_n^{-1}\mathbf{c}_n$$

où

$$\mathbf{\Gamma}_n = \sum_{k=1}^{n} w^{n-k}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^\top$$

$$\mathbf{c}_n = \sum_{k=1}^{n} w^{n-k}\mathbf{x}_k y_k$$

et $w \in]0,1]$ est le facteur d'oubli. (On supposera que $\mathbf{\Gamma}_n$ est inversible.)

1. Donner les équations récursives permettant de calculer $\mathbf{\Gamma}_{n+1}$ à partir de $\mathbf{\Gamma}_n$ et $\mathbf{c}_{n+1}$ à partir de $\mathbf{c}_n$.
2. En appliquant le lemme d'inversion matricielle, en déduire une récurrence sur $\mathbf{\Gamma}_n^{-1}$.
3. En posant $\boldsymbol{S}_n = \mathbf{\Gamma}_n^{-1}$ et $\mathbf{K}_n = \boldsymbol{S}_n\mathbf{x}_n$, montrer que l'algorithme des moindres carrés récursifs s'écrit sous la forme :
   ① $\mathbf{K}_{n+1} = \dfrac{\boldsymbol{S}_n\mathbf{x}_{n+1}}{w + \mathbf{x}_{n+1}^\top \boldsymbol{S}_n\mathbf{x}_{n+1}}$
   ② $\boldsymbol{S}_{n+1} = \dfrac{1}{w}(\boldsymbol{S}_n - \mathbf{K}_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}^\top \boldsymbol{S}_n)$
   ③ $e_{n+1} = y_{n+1} - \mathbf{h}_n^\top \mathbf{x}_{n+1}$
   ④ $\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n + \mathbf{K}_{n+1}e_{n+1}$.
4. Ecrire une fonction scilab effectuant une itération de cet algorithme. Quels sont les arguments à fournir en entrée et ceux à renvoyer en sortie ?