



# Grandes matrices aléatoires

## Petit aperçu historique

Walid Hachem  
CNRS / LIGM, Université Gustave Eiffel

Les matrices aléatoires en mathématiques

Signal et coms : exemples d'application

## Les matrices aléatoires en mathématiques

Signal et coms : exemples d'application

# Contexte

- ▶  $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$  ou  $\mathbb{C}^{N \times N}$  aléatoire
- ▶ D'une façon ou d'une autre,  $\Sigma$  dépend de  $\mathcal{O}(N^2)$  variables indépendantes

Problème général : Spectre de  $\Sigma$  pour  $N$  grand

Modèle canonique dit de **Wigner** :

- ▶  $\Sigma = \frac{W}{\sqrt{N}}$  où  $W$  symétrique,  $\{[W]_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq N}$  iid centrées variance 1.

# Objets

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  valeurs propres (vap) de la matrice de Wigner  $\Sigma$

- ▶ Comportement **macroscopique** : **mesure spectrale**

$$\mu^\Sigma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i} \quad (\ll \text{histogramme des vap} \gg)$$

$\Rightarrow$  fonctionnelles  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\lambda_i) = \int \varphi d\mu^\Sigma$  pour  $N$  grand

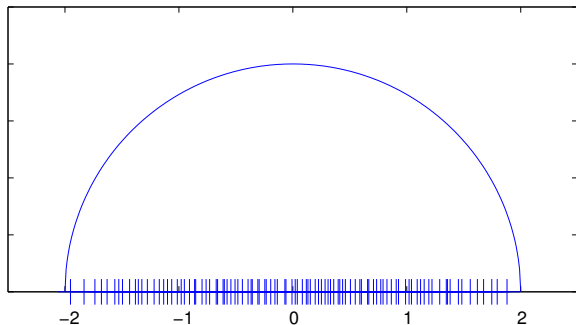
- ▶ **vap extrêmes**, convergence de  $\|\Sigma\|$
- ▶ Comportement **microscopique** : Fluctuations des espacements entre les vap, fluctuations de  $\|\Sigma\|$ , ...
- ▶ Statistiques des **vecteurs propres**

# Universalité

Selon un schéma classique en probabilités, le comportement asymptotique de ces objets ne dépend de la loi des  $[W]_{ij}$  qu'à travers le 2e (parfois le 4e) moment.

## Quelques jalons

- ▶ Wigner'57 : modèle « phénoménologique » pour les niveaux d'énergie de noyaux atomiques lourds : vap d'une grande matrice de Wigner.
- ▶  $\mu^\Sigma \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \text{loi dite du } \mathbf{\text{demi cercle}}$  supportée par  $[-2, 2]$ , cvg universelle



Réalisation pour  $N = 100$

# Quelques jalons

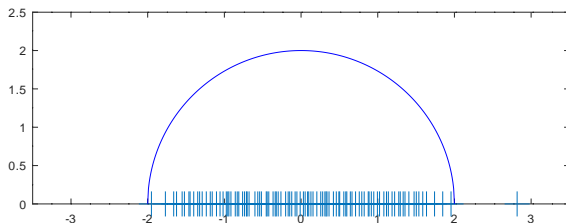
- ▶ vap extrême :  $\|\Sigma\| \rightarrow 2$  ssi  $\mathbb{E}x_{ij}^4 < \infty$  [Bai-Yin'88]
- ▶ Comportement microscopique :
  - ▶ Dans  $] - 2, 2[$ , cas gaussien, [Gaudin, Mehta, Dyson (6x')]  
 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1/N)$ , processus déterminantal, noyau sinus
  - ▶ vaps extrêmes, cas gaussien, [Tracy, Widom (9x')]  
 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(N^{-2/3})$ , processus déterminantal, noyau d'Airy
- ▶ Conjecture de Wigner-Dyson-Gaudin-Mehta : le comportement microscopique est universel
  - ▶ Résolue complètement par [Erdős, Schlein, Yau] et par [Tao-Vu]  $\sim 2010$ .



## Perturbations de rang fixe

$$\Sigma = \rho v v^T + \frac{W}{\sqrt{N}}$$

$W/\sqrt{N}$  Wigner,  $v$  vecteur constant,  $\|v\| = 1$ ,  $\rho > 0$



$\rho = 2.5$

Proche du modèle [Baik, Ben-Arous, Pécché'05]

- ▶ Si  $\rho > 1$ , alors  $\|\Sigma\| \rightarrow \rho + 1/\rho$ , valeur isolée. Sinon  $\rightarrow 2$
- ▶ Résultats sur le vecteur propre associé

# Outils

- ▶ Combinatoire, probabilités libres, polynômes orthogonaux, ...
- ▶ Un outil très polyvalent :  
**Résolvante** et **transformée de Stieltjes** [Marchenko Pastur 67]

Résolvante :  $R_{\Sigma}(z) = (\Sigma - z)^{-1}$  pour  $\Im z > 0$  .

$$\frac{1}{N} \operatorname{tr} R_{\Sigma}(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i - z} = \int \frac{1}{\lambda - z} \mu^{\Sigma}(d\lambda)$$

C'est la transformée de Stieltjes de  $\mu^{\Sigma}$ . Détermine cette mesure

# Autres modèles symétriques

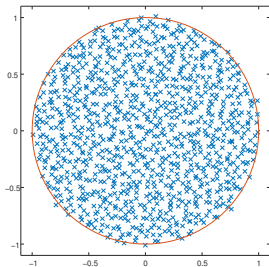
- ▶ [Marchenko Pastur'67] :

$$\Sigma = \frac{1}{N} VV^*,$$

- ▶  $V \in \mathbb{R}^{N \times K}$  ou  $\mathbb{C}^{N \times K}$ ,  $[V]_{ij}$  iid centrées variance 1
- ▶  $N, K \rightarrow \infty$  **au même rythme**
- ▶  $\mu^\Sigma \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mu_{\text{MP}}$ , **loi de M.-P.**
- ▶ Diverses variantes **corrélées, non centrées, structurées, ...** étudiées
- ▶ Comportement microscopique, universalité, ... bien étudiés pour ces divers modèles.

## Modèles non symétriques / non hermitiens

- ▶ Modèle canonique  $N \times N$  :  $\Sigma = \frac{S}{\sqrt{N}}$  où  $[S]_{ij}$  iid centrées variance 1
- ▶  $\mu^\Sigma \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \text{loi uniforme sur le disque}$



- ▶ Problème compliqué à cause de l'instabilité du spectre d'une matrice non symétrique. [Ginibre 6x'] (gaussien complexe) ... [Girko'8x] ... [Tao Vu 2010] (universalité)
- ▶ Modèles structurés, lois microscopiques, ...

Les matrices aléatoires en mathématiques

Signal et coms : exemples d'application

# Communications sans fil

Exemple fondateur [Telatar 95] :

- ▶  $V \in \mathbb{C}^{N \times K}$  canal MIMO **aléatoire**,  $N$  récepteurs,  $K$  émetteurs
- ▶  $[V]_{ij}$  iid centrés variance 1,  $N, K \rightarrow \infty$  **au même rythme**
- ▶ Information mutuelle de Shannon par antenne de réception

$$\mathcal{I} = \frac{1}{N} \mathbb{E} \log \det(\Sigma + I) = \mathbb{E} \int \log(\lambda + 1) \mu^\Sigma(d\lambda) \quad \text{où} \quad \Sigma = \frac{1}{N} VV^*.$$

- ▶  $\mathcal{I} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \int \log(\lambda + 1) \mu_{\text{MP}}(d\lambda)$   
⇒ Assise mathématique au phénomène **capacité croît en  $\mathcal{O}(N)$**

Extensions, autres voies

- ▶ Modèles MIMO ou à accès multiple corrélés / structurés
- ▶ Performances récepteurs, contrôle de puissance, couverture cellulaire, ...

# Statistiques multivariées

- ▶ **Série temporelle**  $Y$  de dimension  $N$  observée sur  $K$  échantillons.  
**Exemple** : corrélation spatiale, blancheur temporelle :

$$Y = R^{1/2} V$$

$N \times K$                       covariance                       $N \times K$   
déterministe                       $[V]_{ij}$  iid centrés

- ▶ But : **Inférence statistique sur  $R$**  :
  - ▶ Statistiques « classiques » :  $N$  fixe,  $K \rightarrow \infty$   
 $\hat{R} = \frac{YY^*}{K} = R^{1/2} \frac{VV^*}{K} R^{1/2} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} R$  (loi des gds nombres)
  - ▶ **Régime des matrices aléatoires** :  $N, K \rightarrow \infty, K \sim N$   
⇒ **Nouveaux estimateurs**
- ▶ Modèles multivariés plus sophistiqués : traitement d'antennes à large bande, modèles d'état à spectre rationnel, ...

# Estimation de composantes de rang fixe

Généralise le modèle Wigner perturbé ci-dessus

$$\Sigma = A + X \quad \text{symétrique } N \times N$$

- ▶  $A$  matrice d'information déterministe,  $\text{rang}(A) \ll N$
- ▶  $X$  matrice aléatoire de « bruit »,  $\text{rang}(X) \sim N$

Applications typiques :

- ▶ **Analyse en composantes principales**
- ▶ **Clustering** en apprentissage statistique. Information sur les clusters dans  $A$  :
  - ▶ *Stochastic Block Model* :  $\Sigma$  est la matrice d'adjacence d'un graphe de connexion, nœuds groupés en communautés
  - ▶ Matrice à noyau :  $[\Sigma]_{ij} \equiv$  fonction d'affinité entre les attributs des éléments  $i$  et  $j$
- ▶ Liens avec la **physique statistique** quand  $A$  est structurée (ex : sparse)



# Autres applications en apprentissage

Dès que la dimension d'un vecteur d'attributs et la taille de la séquence d'apprentissage  $\rightarrow \infty$

- ▶ SVM en grande dimension
- ▶ Neurones artificiels
- ▶ ...

# Modèles non symétriques

$\Sigma$  matrice aléatoire  $N \times N$  non symétrique

- ▶ **Réseaux de neurones** naturels ou artificiels : matrice de connectivité
- ▶ **Réseaux écologiques** (chaîne alimentaire dans un écosystème) : matrice de couplage entre les espèces

Systemes décrits par des équations différentielles

## Comportement dynamique

$\Leftrightarrow$

vap de  $\Sigma$ , *i.e.*, comportement de  $\mu^\Sigma$  et de  $\|\Sigma\|$