Université Paris-Est Marne-La-Vallée
Ingénieurs 2000. Option: Objects Communiquants

Matière: Théorie de l'Information
1er sémestre 2010

Examen de Théorie de l'Information

Proposé par: Prof. Abdellatif Zaidi

Date: 03 Déc. 2010 Durée: 2 heures Barème: Ex. 1 (8 points), 2 (12 points)

Exercice 1 :

Soient X une variable aléatoire Gaussienne de moyenne $E[X] = \mu_X$ et de variance $E[X^2] - \mu_X^2 = \sigma_X^2$. Comme nous avons vu en cours l'entropie, *différentielle*, de X est donnée par : $H(X) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma_X^2)$.

1) Soit $X_c = X + c$ où c est une constante donnée. Quelle est la loi de probabilité de X_c ? Trouver alors l'entropie différentielle $H(X_c)$, et comparer le résultat à $H(X)$.

2) Soit $X_a = aX$ où a est une constante donnée. Quelle est la loi de probabilité de X_a ? Trouver alors l'entropie différentielle $H(X_a)$, et montrer que $H(X_a) = H(X) + \log(|a|)$.

3) Cas général: Montrer que les égalités $H(X_a) = H(X)$ et $H(X_a) = H(X) + \log(|a|)$ sont plus générales et restent valables pour une variable aléatoire X quelconque de densité de probabilité $p_X(x)$.

Soit Y une autre variable aléatoire Gaussienne de moyenne $E[Y] = \mu_Y$ et de variance $E[Y^2] - \mu_Y^2 = \sigma_Y^2$, indépendante de X.

4) Quelle est la loi de probabilité de $S = X+Y$? Trouver alors l'entropie différentielle $H(X+Y)$.

5) En remarquant que $I(X;Y) = 0$ puisque X et Y sont indépendantes, calculer $H(X,Y) = H(X) + H(Y) - I(X;Y)$.

6) Montrer que
$$e^{2H(X+Y)} = e^{2H(X)} + e^{2H(Y)}. \tag{1}$$

   En général, nous n'avons pas égalité dans (1), et le signe "=" est remplacé par "≥". L'inégalité est alors appelée "Inégalité de la variance entropique".

Exercice 2 :

Parie A : Égalité dans le théorème du traitement de données

On considère une chaîne de Markov $X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z$. D'après le théorème du traitement de données, on a : $I(X;Y) \geq I(X;Z)$ et $I(Y;Z) \geq I(X;Z)$.

1) Montrer qu'il y a égalité $I(X;Y) = I(X;Z)$ si et seulement si $X \leftrightarrow Z \leftrightarrow Y$ est également une chaîne de Markov.

2) Trouver la condition nécessaire et suffisante d'égalité $I(Y;Z) = I(X;Z)$

Parie B : Traitement déterministe de données

3) Montrer, par application du théorème du traitement de données, que pour toute fonction déterministe g et pour toute fonction déterministe f, on a :

$$I(X;Y) \geq I(X;g(Y)) \quad \text{et} \quad I(X;Y) \geq I(f(X);Y) \tag{2}$$

(Indication: remarquer que $X \leftrightarrow Y \leftrightarrow g(Y)$ et $f(X) \leftrightarrow X \leftrightarrow Y$ sont des chaînes de Markov).

4) Montrer qu'il y a égalité $I(X;Y) = I(X;g(Y))$ lorsque g est une fonction *inversible* (bijective) pour presque tout y. De même, montrer qu'il y a égalité $I(X;Y) = I(f(X);Y)$ lorsque f est une fonction inversible pour presque tout x.

5) *Application :* On effectue un traitement inversible (appelé codage) avant transmission dans un canal quelconque. Commenter l'égalité obtenue.

6) Montrer qu'il y a également égalités $I(X;Y) = I(X;g(Y))$ et $I(X;Y) = I(f(X);Y)$ lorsque X et Y sont *indépendants*.

7) *Application :* Un canal ou traitement $X \longrightarrow Y$ est dit *opaque* lorsque la sortie Y est indépendante de l'entrée X. On effectue un traitement déterministe (appelé décodage) après transmission dans un canal opaque. Commenter l'égalité obtenue.

8) Déduire de la question 3 que pour deux fonctions déterministes f et g quelconques, on a :

$$I(X;Y) \geq I(f(X);g(Y)) \tag{3}$$

Autrement dit, *tout traitement déterministe fait perdre de l'information.*

9) Redémontrer ce résultat en considérant la chaîne de Markov $f(X) \leftrightarrow X \leftrightarrow Y \leftrightarrow g(Y)$.

Parie C : Application à l'entropie

Dans cette partie, X est une variable aléatoire *discrète*

10) Montrer, par application de la question 8, que pour toute fonction déterministe f, on a :

$$H(f(X)) \leq H(X) \tag{4}$$

11) Montrer qu'il y a égalité, c'est à dire $H(f(X)) = H(X)$, si et seulement si f est une fonction déterministe pour presque tout x.