Licence SM, Examen de mathématiques
Documents et calculettes interdits.

<u>Exercice 1.</u> Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie par $f(t) = e^{-|t|}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de l'intégrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu}{(1+4\pi^2\nu^2)^2}$$

Evaluer sans faire de calcul d'intégrales les transformées de Fourier des fonctions $g(t) = tf(t)$, $h(t) = f(t)\cos(4\pi t)$ et $i(t) = f(t-1)$. Trouver une fonction de $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation

$$\int_0^\infty e^{-s} f(t-s)ds = e^{-|t|}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pourra se demander quelle est la transformée de Fourier de la fonction $u(t)$ définie par $u(t) = e^t$ si $t < 0$ et $u(t) = 0$ si $t \geq 0$.

<u>Exercice 2.</u> Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = e^{-t}$ si $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ si $t < 0$. En déduire les transformées de Fourier des fonctions $tf(t)$ et $t^2 f(t)$. Trouver une fonction $g(t)$ continument dérivable solution de l'équation différentielle $g(t) + g'(t) = f(t)$.

<u>Exercice 3.</u> Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = \cos 2\pi t$ si $t \in [-1, 1]$ et $f(t) = 0$ si $|t| > 1$. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}(\nu)$ de $f(t)$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\nu \sin 2\pi\nu}{\nu^2 - 1}\right]^2 d\nu$$

Au cas où cela s'avérerait utile, on rappelle que $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.