(1)

$x(t) = \underbrace{(1 + k\,m(t))}\,\underline{\cos 2\pi\nu_0 t}$ $\qquad (1+k\,m(t)) > 0 \quad \forall t$

$x(t) = m(t)\cos 2\pi\nu_0 t \qquad \hat{x}(\nu) \overset{?}{=} \frac{1}{2}\left(\hat{m}(\nu-\nu_0) + \hat{m}(\nu+\nu_0)\right)$

$m(t) = 1 + k\,m(t)$, $\hat{m}(\nu) \overset{?}{=}$

$\widehat{k\,m}(\nu) = k\,\hat{m}(\nu)$

$z(t) = \cos 2\pi\nu_1 t \qquad \hat{z}(\nu) = \frac{1}{2}\left[\delta(\nu-\nu_1) + \delta(\nu+\nu_1)\right]$

$\nu_1 = 0$, $z(t) = 1 \ \forall t$, $\hat{z}(\nu) = \delta(\nu)$

$$\int \delta(\nu-\nu_1)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu = e^{2i\pi\nu_1 t}$$

$$\frac{1}{2}\left[\int (\delta(\nu-\nu_1) + \delta(\nu+\nu_1))\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu = \frac{1}{2}\int \delta(\nu-\nu_1)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu + \frac{1}{2}\int \delta(\nu+\nu_1)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu\right.$$

2

$$\int \frac{1}{2}\left(\delta(\nu-\nu_1)+\delta(\nu+\nu_1)\right) e^{2i\pi\nu t}\, d\nu = \underbrace{\frac{1}{2}\int \delta(\nu-\nu_1)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu + \frac{1}{2}\int \delta(\nu+\nu_1)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu}_{\frac{1}{2} e^{2i\pi\nu_1 t} + \frac{1}{2} e^{-2i\pi\nu_1 t} = \cos 2\pi\nu_1 t}$$

$$\Rightarrow \quad TF(\cos 2\pi\nu_1 t) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu-\nu_1)+\delta(\nu+\nu_1)\right)$$

$$\nu_1 = 0, \quad \cos 2\pi\nu_1 t = 1 \quad \forall t$$

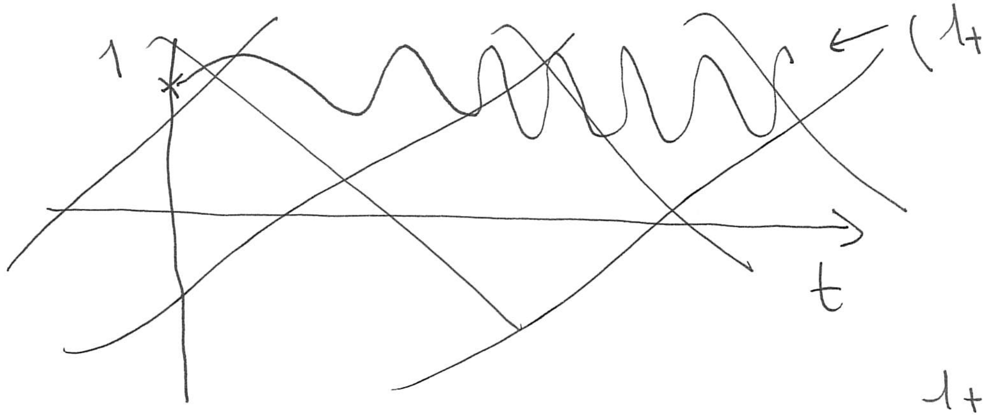
$$TF(1) = \delta(\nu)$$

$$m(t) = 1 + k\, m(t), \quad \hat{m}(\nu) = \delta(\nu) + k\, \hat{m}(\nu)$$

$$\hat{x}(\nu) = \frac{1}{2}\left[\delta(\nu-\nu_0)+\delta(\nu+\nu_0)\right] + \frac{k}{2}\left[\hat{m}(\nu-\nu_0)+\hat{m}(\nu+\nu_0)\right]$$

3

Représenter graphiquement $t \longrightarrow x(t)$ et $\nu \longrightarrow |\hat{x}(\nu)|$

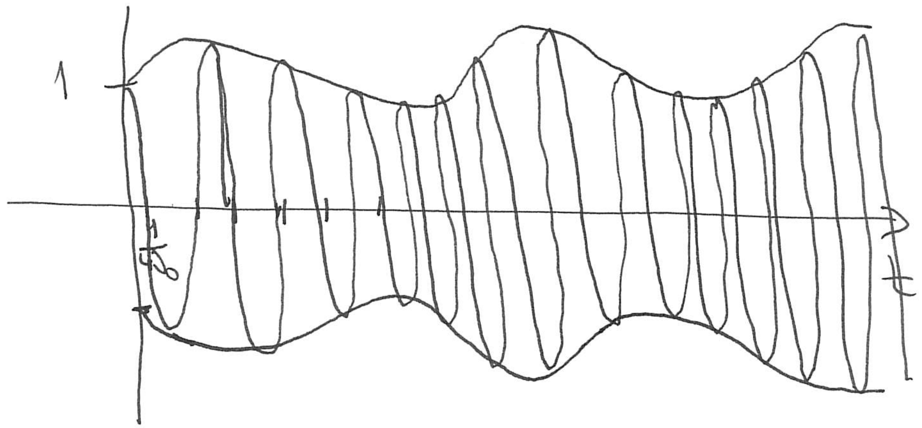


$$x(t) = (1 + k_m m(t)) \underbrace{\cos 2\pi\nu_0 t}$$

$1 + k_m m(t)$

$\cos 2\pi\nu_0 t \in [-1, 1]$

$x(t) \in [-(1 + k_m m(t)), 1 + k_m m(t)]$

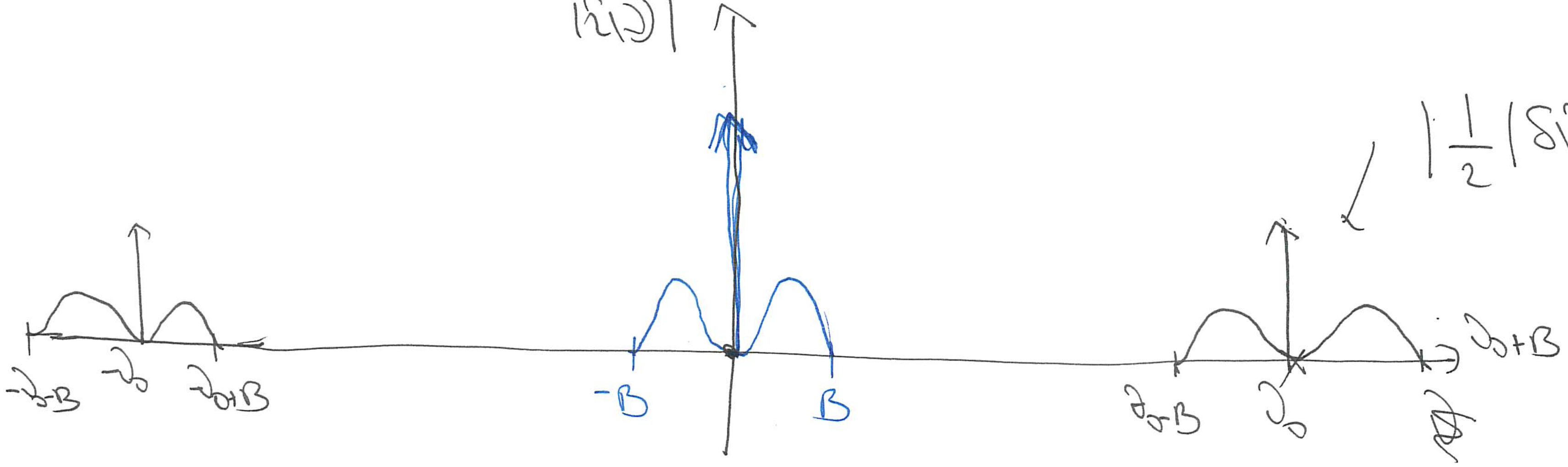


$\cos 2\pi\nu_0 t = 0 \qquad 2\pi\nu_0 t = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad t = \frac{1}{4\nu_0} + \frac{k}{2\nu_0}, \; k \geq 0$

(4)

$$\hat{x}(\nu) = \frac{1}{2}\left[\delta(\nu-\nu_0) + k\,\hat{m}(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0) + k\,\hat{m}(\nu+\nu_0)\right]$$

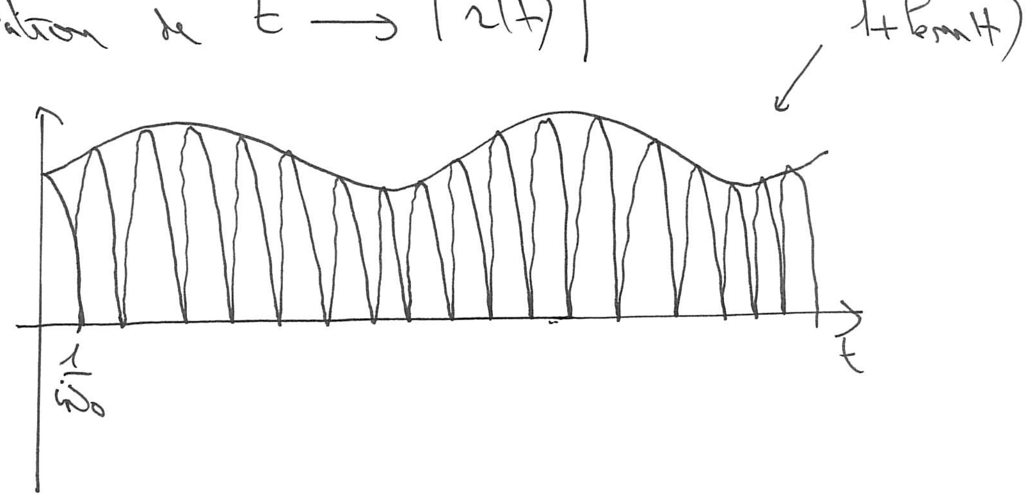
$$\left|\frac{1}{2}\left(\delta(\nu-\nu_0) + k\,\hat{m}(\nu-\nu_0)\right)\right|$$



$|\hat{m}(\nu)|$, $m(t) = 1 + k\,m(t)$

$$\boxed{\hat{m}(\nu) = \delta(\nu) + k\,\hat{m}(\nu)}$$

Représentation de $t \longrightarrow |x(t)|$



Sortie d'un filtre passe-bas bien choisi lorsque l'entrée est $|x(t)|$.

Il faut pour répondre à cette question évaluer la transformée de Fourier de $|x(t)|$

Pour ceci, on procède comme dans le cas de $|e^{-\alpha t} \cos 2\pi\nu_0 t| \, \mathbb{1}_{t \in \mathbb{R}^+}$.

$$|\cos 2\pi\nu_0 t| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 4\pi n\nu_0 t$$

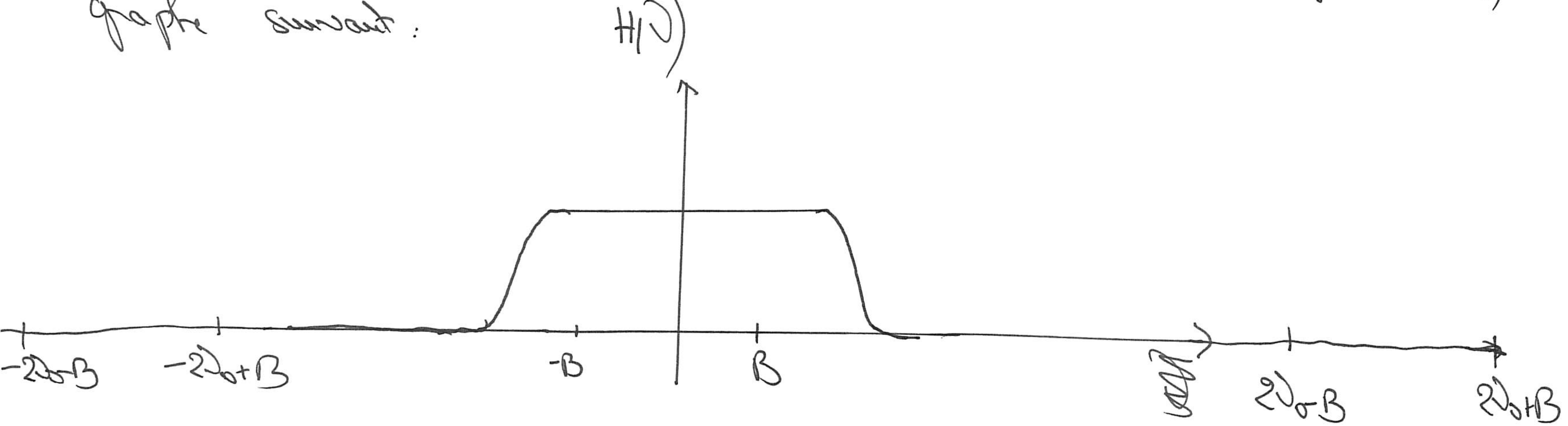
$$\Rightarrow \; |x(t)| = \frac{2}{\pi}(1 + k m(t)) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,(1 + k m(t)) \cos 4\pi n\nu_0 t$$

La TF de $(1 + k m(t)) \cos 4\pi n\nu_0 t$ vaut $\frac{1}{2}\Big[\delta(\nu - 2\nu_0 n) + k\hat{m}(\nu - 2\nu_0 n) + \delta(\nu + \nu_0 2n) + k\hat{m}(\nu + 2n\nu_0)\Big]$

Donc, la TF de $|r(t)|$ vaut :

$$\frac{2}{\pi}\left(\delta(\nu)+k\hat{m}(\nu)\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\delta(\nu-2n\nu_0)+\hat{m}(\nu-2n\nu_0)+\delta(\nu+2n\nu_0)+\hat{m}(\nu+2n\nu_0)\right)$$

Considérons un filtre passe bas dont la fonction de transfert $H(\nu)$ est proche du graphe suivant :



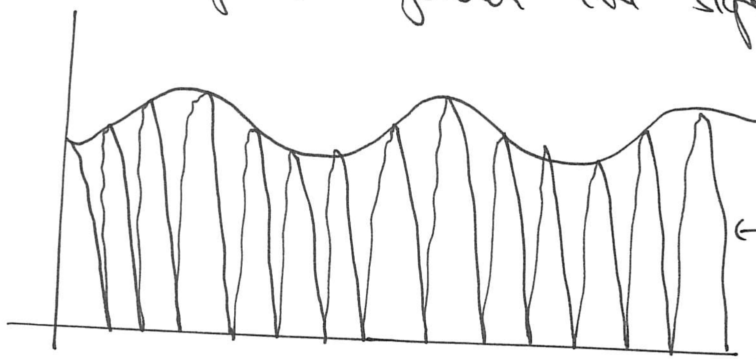
i.e, $H(\nu) \simeq 1$ si $\nu \in [-B-A, B+A]$, $B+A < 2\nu_0 - B$

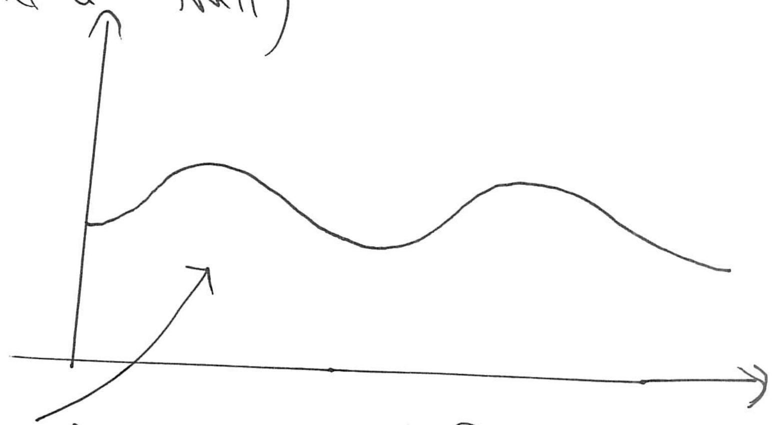
$H(\nu) \simeq 0$ hors de $[-B-A, B+A]$

Alors, le produit de $H(\nu)$ avec la TF de $|r(t)|$ se réduit à $\frac{2}{\pi}\left(\delta(\nu)+k\hat{m}(\nu)\right)$

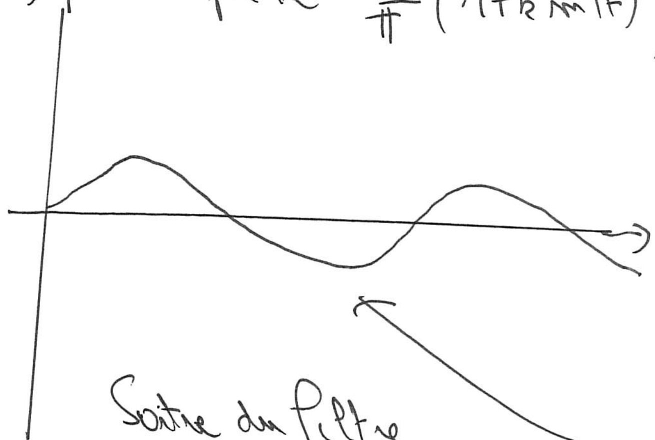
Donc, la sortie du filtre passe-bas vaut $\frac{2}{\pi}\left(1+k\,m(t)\right)$.

Lorsque $\hat{m}(\nu) \simeq 0$ dans un proche voisinage de 0, il suffit de faire passer $\frac{2}{\pi}(1+k\,m(t))$ dans un filtre passe-haut coupant les fréquences les plus basses pour générer un signal proportionnel à $m(t)$





Graphe de la sortie du $\cancel{|r(t)|}$ filtre $H(\nu)$ excité par $|r(t)|$ = Graphe de $\frac{2}{\pi}(1+k\,m(t))$



Sortie du filtre passe-haut qui élimine le terme constant $\frac{2}{\pi}$ de $\frac{2}{\pi}(1+k\,m(t))$