1

Licence SM, Corrrection de la fin du TD2.

Traitement du signal analogique.

Corrigé de la fin de l'exercice 1

On considère le filtre défini par l'équation différentielle

$$y(t) + (\tau_1 + \tau_2)y^{'}(t) + \tau_1\tau_2 y^{''}(t) = Ku(t)$$

Afin de calculer sa fonction de transfert $H(p)$, on prend la transformée de Laplace de l'équation, et on obtient que

$$Y(p)(1 + (\tau_1 + \tau_2)p + \tau_1\tau_2 p^2) = KU(p)$$

Par conséquent, $H(p)$ est donné par

$$H(p) = \frac{K}{1 + (\tau_1 + \tau_2)p + \tau_1\tau_2 p^2} = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

Pour évaluer la réponse impulsionnelle, on décompose en éléments simples:

$$\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} = \frac{\lambda_1}{1+\tau_1 p} + \frac{\lambda_2}{1+\tau_2 p}$$

Pour trouver λ_1, on multiplie à gauche et à droite par $(1+\tau_1 p)$, puis on prend $p = -\frac{1}{\tau_1}$. On en déduit que

$$\lambda_1 = \left[\frac{1}{1+\tau_2 p}\right]_{p=-\frac{1}{\tau_1}} = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$$

De la même façon, $\lambda_2 = \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} = -\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}$. On en déduit que

$$H(p) = K\frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(\frac{\tau_1}{1+\tau_1 p} - \frac{\tau_2}{1+\tau_2 p}\right) = K\frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(\frac{1}{p+\frac{1}{\tau_1}} - \frac{1}{p+\frac{1}{\tau_2}}\right)$$

et que la réponse impulsionnelle $h(t)$ vaut

$$h(t) = K\frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}\right)\Upsilon(t)$$

La réponse indicielle est la sortie du filtre lorsque l'entrée $u(t)$ est l'échelon unité d'Heaviside $\Upsilon(t)$. Par conséquence, $U(p) = \frac{1}{p}$, et si $y(t)$ désigne la sortie, $Y(p)$ est égal à $\frac{H(p)}{p}$. $Y(p)$ est donc égal à

$$Y(p) = \frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

Pour retrouver $Y(p)$, on calcule la décomposition en éléments simples de $Y(p)$:

$$\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} = \frac{\lambda}{p} + \frac{\mu_1}{1+\tau_1 p} + \frac{\mu_2}{1+\tau_2 p}$$

On obtient immédiatement que :

$$\lambda = \left[\frac{1}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}\right]_{p=0} = 1$$

$$\mu_1 = \left[\frac{1}{p(1+T_2 p)}\right]_{p=-\frac{1}{T_1}} = \frac{-T_1^2}{T_1 - T_2}$$

$$\mu_2 = \left[\frac{1}{p(1+T_1 p)}\right]_{p=-\frac{1}{T_2}} = \frac{-T_2^2}{T_2 - T_1} = \frac{T_2^2}{T_1 - T_2}$$

$$\frac{1}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)} = \frac{1}{p} - \frac{T_1^2}{T_1 - T_2}\,\frac{1}{1+T_1 p} + \frac{T_2^2}{T_1 - T_2}\,\frac{1}{1+T_2 p}$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{T_1}{T_1 - T_2}\,\frac{1}{p+\frac{1}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}\,\frac{1}{p+\frac{1}{T_2}}$$

La réponse indicielle $y(t)$ vaut donc :

$$y(t) = K\left[1 - \frac{1}{T_1 - T_2}\left(T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\right]$$

Pour évaluer les diagrammes de Bode, on va supposer que $T_1 \ll T_2$

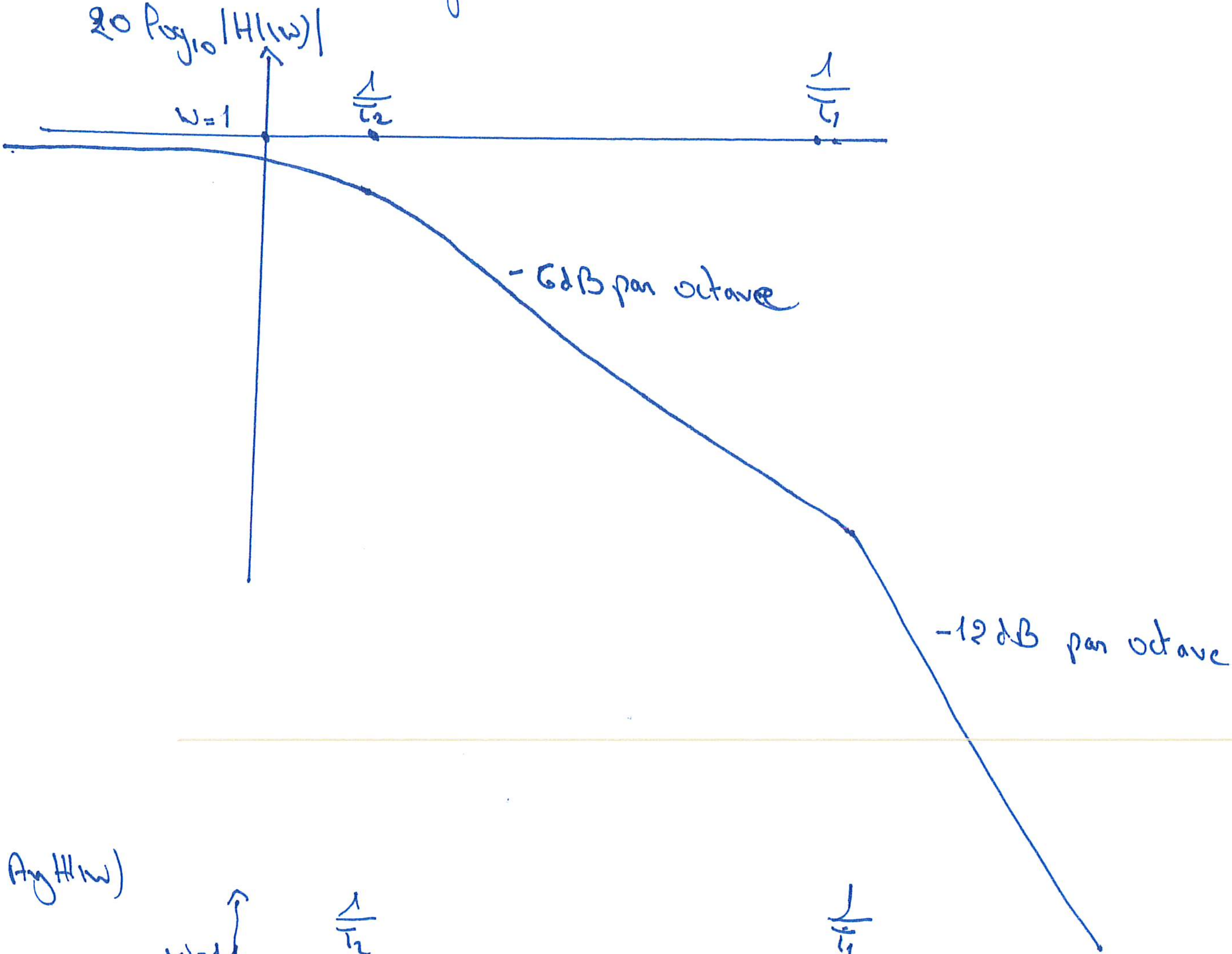
$\Rightarrow \frac{1}{T_2} << \frac{1}{T_1}$, et que $K = 1$ pour simplifier.

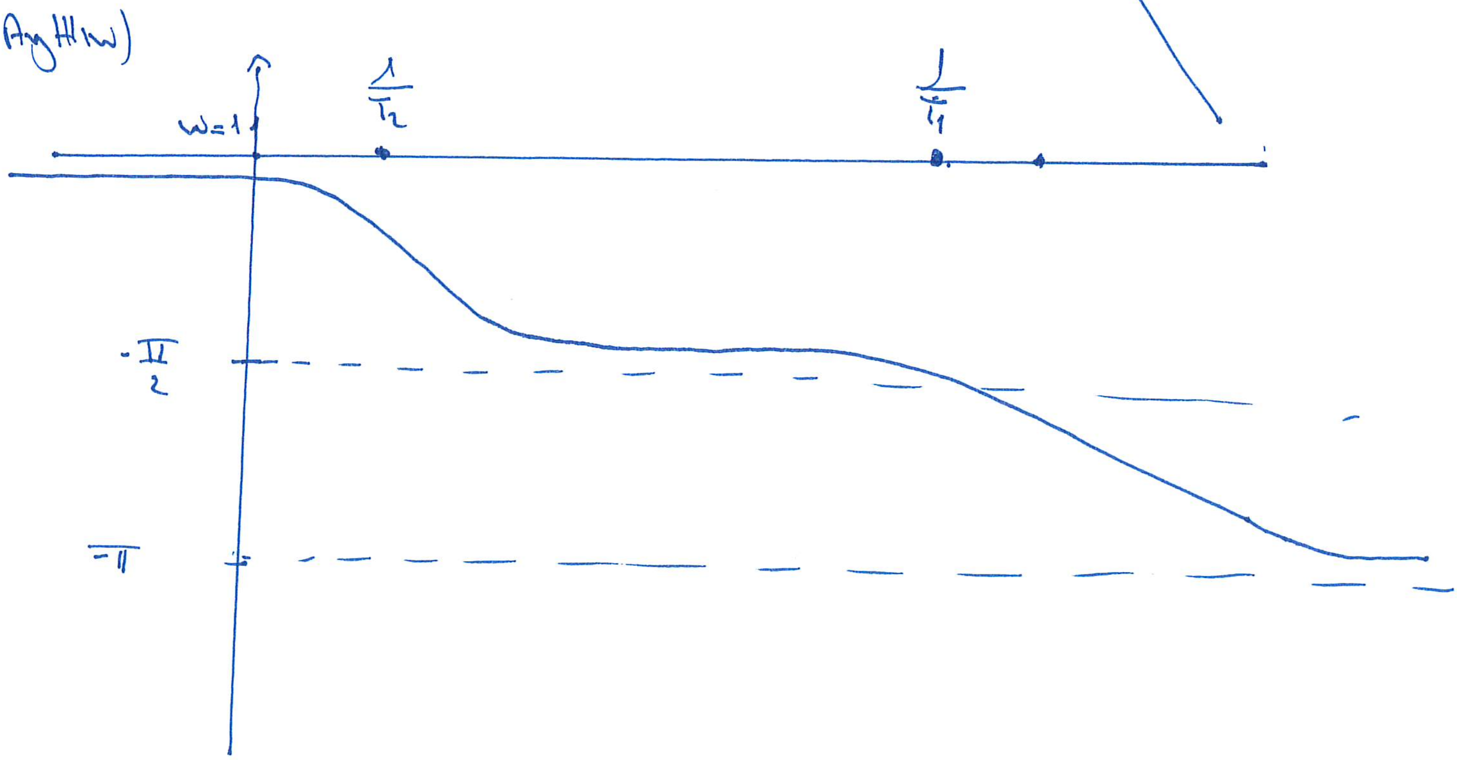
$$20 \log_{10} |H(i\omega)| = 20 \log_{10} \left|\frac{1}{1+i\omega T_1}\right| + 20 \log \left|\frac{1}{1+i\omega T_2}\right|$$

$$\operatorname{Arg} H(i\omega) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{1+i\omega T_1}\right) + \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{1+i\omega T_2}\right)$$

Les diagrammes de Bode de $H(p)$ peuvent donc être vus comme la somme des diagrammes de Bode des systèmes du premier ordre $\frac{1}{1+\tau_1 p}$ et $\frac{1}{1+\tau_2 p}$. Si $\frac{1}{\tau_2} \ll \frac{1}{\tau_1}$,

on obtient alors la forme suivante :





Si: $u(t) = A\cos\omega_0 t\, \mathbb{1}(t)$, $\quad U(p) = \dfrac{A\,p}{(p-i\omega_0)(p+i\omega_0)}$

$$Y(p) = H(p)U(p) = AK\,\frac{p}{(p-i\omega_0)(p+i\omega_0)}\,\frac{1}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$$

$$\frac{p}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)(p-i\omega_0)(p+i\omega_0)} = \frac{\alpha_1}{1+T_1 p} + \frac{\alpha_2}{1+T_2 p} + \frac{\mu}{p-i\omega_0} + \frac{\mu^*}{p+i\omega_0}$$

$$\alpha_1 = \left[\frac{p}{(1+T_2 p)(p-i\omega_0)(p+i\omega_0)}\right]_{p=-\frac{1}{T_1}} = \left[\frac{p}{(1+T_2 p)(p^2+\omega_0^2)}\right]_{p=-\frac{1}{T_1}} = \frac{-T_1^2}{(T_1-T_2)\left(1+(\omega_0 T_1)^2\right)}$$

$$\alpha_2 = \frac{-T_2^2}{(T_2-T_1)\left(1+(\omega_0 T_2)^2\right)} = \frac{T_2^2}{(T_1-T_2)(1+\omega_0^2 T_2^2)}$$

$$\mu = \left[\frac{p}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)(p+i\omega_0)}\right]_{p=i\omega_0} = \frac{i\omega_0}{(1+i\omega_0 T_1)(1+i\omega_0 T_2)\,2i\omega_0} = \frac{1}{(1+i\omega_0 T_1)(1+i\omega_0 T_2)}$$

$\Longrightarrow$

$$Y(p) = AK\left[\frac{-T_1}{(T_1-T_2)(1+\omega_0^2 T_1^2)}\,\frac{1}{p+\frac{1}{T_1}} + \frac{T_2}{(T_1-T_2)(1+\omega_0^2 T_2)}\,\frac{1}{p+\frac{1}{T_2}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(1+i\omega_0 T_1)(1+i\omega_0 T_2)}\,\frac{1}{p-i\omega_0} + \left(\frac{1}{(1+i\omega_0 T_1)(1+i\omega_0 T_2)}\right)^*\frac{1}{p+i\omega_0}\right]$$

Donc,

$$y(t) = \frac{AK}{T_1 - T_2}\left(\frac{T_2}{1+\omega_0^2 T_2}\, e^{-t/T_2} - \frac{T_1\, e^{-t/T_1}}{1+\omega_0^2 T_1} \right)$$

$$+ \frac{AK}{(1+i\omega_0 T_1)(1+i\omega_0 T_2)}\, e^{i\omega_0 t} + AK \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\left((1+i\omega_0 T_1)(1+i\omega_0 T_2)\right)^*}$$

On rappelle que $H(i\omega) = \dfrac{K}{(1+i\omega T_1)(1+i\omega T_2)}$. Donc,

$$y(t) = \frac{AK}{T_1 - T_2}\left(\frac{T_2}{1+\omega_0^2 T_2}\, e^{-t/T_2} - \frac{T_1\, e^{-t/T_1}}{1+\omega_0^2 T_1^2} \right) \leftarrow \text{régime transitoire}$$

$$+ A\Big[\underbrace{H(i\omega_0)\, e^{i\omega_0 t} + \left(H(i\omega_0)\right)^* e^{-i\omega_0 t}}_{|H(i\omega_0)| \cos\left(\omega_0 t + \operatorname{Arg} H(i\omega_0)\right).} \Big] \leftarrow \text{régime permanent.}$$

Exercice 2

En prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient que :

$$\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right) Y(p) = K\, U(p)$$

Donc, $$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

On va commencer par analyser les pôles de $H(p)$, ce qui conduit à résoudre l'équation $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta' = \xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(\xi^2 - 1)$$

Si $\xi \geq 1$, il y a 2 pôles réels de même signe et donc la somme est négative. Ces 2 pôles sont donc strictement négatifs, de sorte que l'on peut les noter $-\frac{1}{T_1}$ et $-\frac{1}{T_2}$ où T_1 et T_2 sont strictement positifs. Dans ces conditions, $1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = (1+T_1 p)(1+T_2 p)$, et $H(p) = \frac{K}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$

On considère donc le cas où $\xi < 1$. Il y a alors 2 pôles complexes conjugués :

$p_1 = -\xi\omega_0 + i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$, $p_1^* = -\xi\omega_0 - i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$.

On constate que $\operatorname{Re} p_1 < 0$ et $\operatorname{Re} p_1^* < 0$. Donc, le filtre est stable

$$H(i\omega) = \frac{K}{1 + 2i\xi\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\Rightarrow |H(\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Si $\omega = \omega_0$, $|H(\omega_0)| = \frac{1}{2\xi}$.

$$\frac{d}{d\omega}|H(\omega)| = -\frac{1}{2}\frac{K}{\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{3/2}} \cdot \frac{d}{d\omega}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

Le sens de variation de $|H(\omega)|$ va donc dépendre du signe de

$$-\frac{d}{d\omega}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

$$= -\left[2\times\frac{-2\omega}{\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{8\xi^2}{\omega_0^2}\omega\right]$$

$$= \frac{4\omega}{\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2\xi^2\right) = \frac{4\omega}{\omega_0^2}\left(1-2\xi^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Si $1-2\xi^2 < 0 \Leftrightarrow \xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{d}{d\omega}|H(\omega)| < 0 \quad \forall \omega \geq 0$

Si $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $1-2\xi^2 > 0$, et la dérivée s'annule

si $\omega = \omega_{max}$, avec $\left(\frac{\omega_{max}}{\omega_0}\right)^2 = 1-2\xi^2 \Leftrightarrow \omega_{max}^2 = \omega_0^2(1-2\xi^2)$

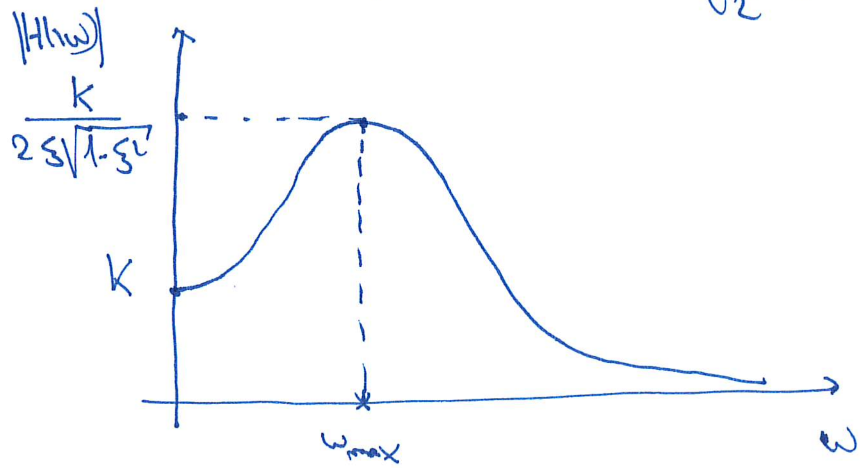
$$\Rightarrow \omega_{max} = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$$

Si $\omega \in [0, \omega_{max}[$, $\frac{d}{d\omega}|H(\omega)| > 0$ et si $\omega > \omega_{max}$, $\frac{d}{d\omega}|H(\omega)| < 0$. $\omega \to |H(\omega)|$ croît donc sur $[0, \omega_{max}]$, et décroît ensuite. Si $\omega = \omega_{max}$, on voit que

$$|H(\omega_{max})| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-(1-2\xi^2)\right)^2 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{4\xi^2 - 4\xi^4}} = \frac{K}{2\xi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

On voit donc que plus ξ se rapproche de 0, plus $|H(\omega_{max})|$ est grand. A noter que comme $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $1-\xi^2$ ne peut s'annuler.



Pour calculer la réponse ~~impulsionne~~ indicielle, on utilise le fait que sa transformée de Laplace $Y(p)$ vaut $Y(p) = \frac{H(p)}{p}$.

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 + \omega_0^2} \quad \text{et} \quad p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = (p-p_1)(p-p_1^*)$$

$$Y(p) = \frac{H(p)}{p} = K\omega_0^2 \, \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_1^*)}$$

$$\frac{1}{p(p-p_1)(p-p_1^*)} = \frac{\lambda}{p} + \frac{\mu}{p-p_1} + \frac{\mu^*}{p-p_1^*}$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{(p-p_1)(p-p_1^*)}\right)_{p=0} = \frac{1}{|p_1|^2} = \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$\mu = \left(\frac{1}{p(p-p_1^*)}\right)_{p=p_1} = \frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{p_1-p_1^*}$$

$\Rightarrow$

$$Y(p) = K\omega_0^2 \left[\frac{1}{\omega_0^2}\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\frac{1}{p_1-p_1^*}\frac{1}{p-p_1} + \frac{1}{p_1^*}\frac{1}{p_1^*-p_1}\frac{1}{p-p_1^*} \right]$$

$$y(t) = \left[K + K\omega_0^2 \left(\frac{1}{p_1(p_1-p_1^*)} e^{p_1 t} + \frac{1}{p_1^*(p_1^*-p_1)} e^{p_1^* t} \right)\right] \Upsilon(t)$$

$$p_1 - p_1^* = 2i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

$$e^{p_1 t} = e^{-\xi\omega_0 t} e^{i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t} , \quad e^{p_1^* t} = e^{-\xi\omega_0 t} e^{-i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t}$$

$$\left(\frac{1}{p_1(p_1-p_1^*)} e^{p_1 t} + \frac{1}{p_1^*(p_1^*-p_1)} e^{p_1^* t} \right) = \frac{1}{(p_1-p_1^*)} \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_1^* t}}{p_1^*} \right)$$

$$= \frac{1}{2i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \Bigg(\underbrace{\frac{e^{i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t}}{p_1} - \frac{e^{-i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t}}{p_1^*}}_{2i \, \mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t}}{p_1}\right]} \Bigg)$$

Donc :

$$\frac{1}{p_1(p-p_1^*)} e^{p_1 t} + \frac{1}{p_1^*(p_1^*-p_1)} e^{p_1^* t} = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \, \mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t}}{p_1}\right]$$

$$\mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t}}{p_1}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t}\, p_1^*}{|p_1|^2}\right] = \frac{1}{\omega_0^2}\,\mathrm{Im}\left[e^{i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t}\, p_1^*\right]$$

$$= \frac{1}{\omega_0^2}\,\mathrm{Im}\left[\left(\cos\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t + i\sin\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)\left(-\xi\omega_0 - i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{\omega_0^2}\left(\xi\omega_0 \sin\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t + \omega_0\sqrt{1-\xi^2}\cos\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)$$

On trouve donc finalement :

$$y(t) = K\Bigg[1 \underbrace{- \omega_0\left(\xi\sin\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t + \sqrt{1-\xi^2}\cos\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t\right) e^{-\xi\omega_0 t}}_{\text{régime transitoire}}\Bigg]$$