Licence SM, Examen partiel de traitement numérique du signal

<u>Exercice.</u> On considère le signal $x_a(t)$ dont la transformée de Fourier $X_a(\nu)$ est donnée par $X_a(\nu) = 1 - \frac{|\nu|}{B}$ si $\nu \in [-B, B]$ et $X_a(\nu) = 0$ si ν n'appartient pas à $[-B, B]$. Montrer que le signal $x_a(t)$ est donné pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$x_a(t) = B \left(\frac{\sin \pi B t}{\pi B t} \right)^2$$

Pour quelles fréquences d'échantillonnages peut-on échantillonner $x_a(t)$ sans perdre d'information ? Justifier que l'égalité

$$X_a(\nu) = \frac{1}{2B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a \left(\frac{n}{2B} \right) e^{-2i\pi \frac{n\nu}{2B}}$$

a lieu pour tout $\nu \in [-B, B]$. Montrer que ceci implique que

$$\frac{1}{2B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a \left(\frac{n}{2B} \right) = 1$$

En déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

On pourra remarquer que $\left(\frac{\sin n\pi/2}{n\pi/2} \right)^2 = 1$ si $n = 0$ et vaut 0 si n est un entier pair non nul.
Que vaut la somme

$$\frac{1}{4B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a \left(\frac{n}{4B} \right) e^{-2i\pi \frac{n\nu}{4B}}$$

lorsque $\nu \in [-2B, 2B]$?

<u>Questions de cours</u> On considère un signal $x_a(t)$ de bande passante $[-B, B]$. A quelles fréquences peut-on l'échantillonner afin de ne pas perdre d'information. Si T_e est l'une des périodes d'échantillonnage correspondantes, on désigne par $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ le signal à temps discret défini par $x_n = x_a(nT_e)$. Donner la définition de la transformée de Fourier du signal à temps discret $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Comment est-elle reliée à celle du signal à temps continu $x_a(t)$? Est-il vrai que $\int_{\mathbb{R}} x_a(t)\, dt = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n$? Justifier la réponse. On veut filtrer x_a par un filtre analogique passe-bas de bande passante $[-B/2, B/2]$ dont on note $h_a(t)$ et $H_a(\nu)$ la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert respectivement. Est-il vrai que

$$(h_a * x_a)(nT_e) = \int_0^{+\infty} h_a(s) x_a(nT_e - s) ds = T_e \sum_{k=0}^{+\infty} h_a(kT_e) x_{n-k}$$

Justifier votre réponse. Indiquer en quoi cette propriété implique que l'on peut générer le signal analogique $y_a(t) = (h_a * x_a)(t)$ en faisant passer le signal à temps discret $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans un filtre numérique dont on précisera la réponse impulsionnelle, et en utilisant un convertisseur numérique analogique. Justifier l'intérêt de cette démarche.