

# Modèles pour les systèmes MIMO.

## Motivation

Utiliser un émetteur avec  $K$  antennes.

Envoyer des suites de symboles indépendantes sur chaque antenne.

Peut permettre potentiellement de multiplier le débit par  $K$

Avoir un récepteur avec  $N \geq K$  antennes.

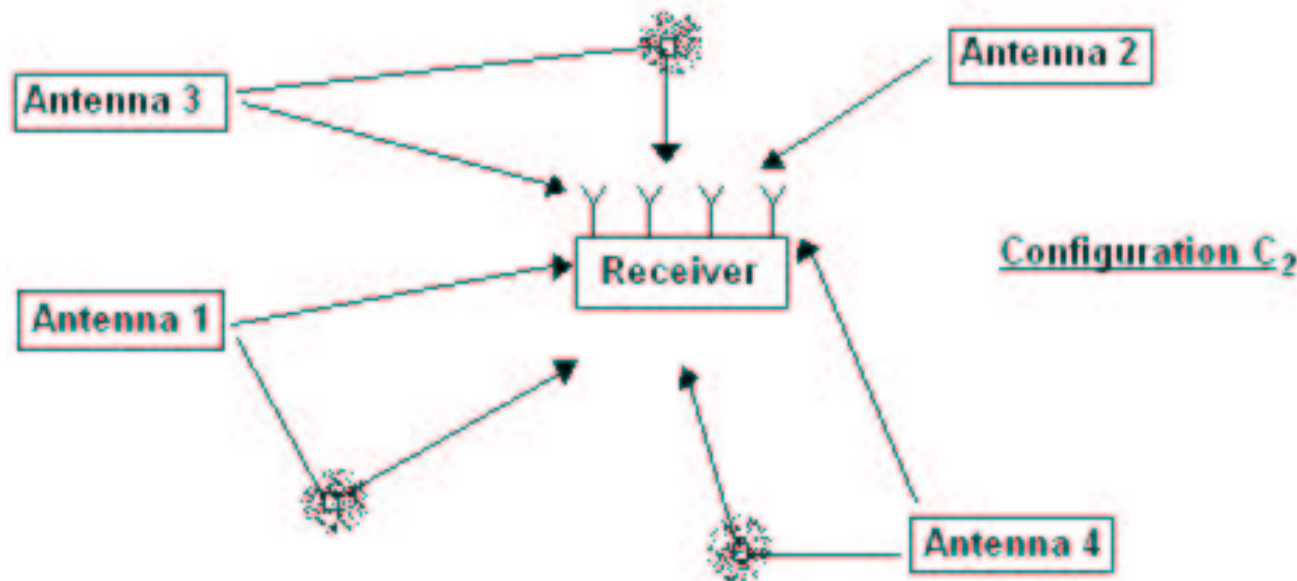
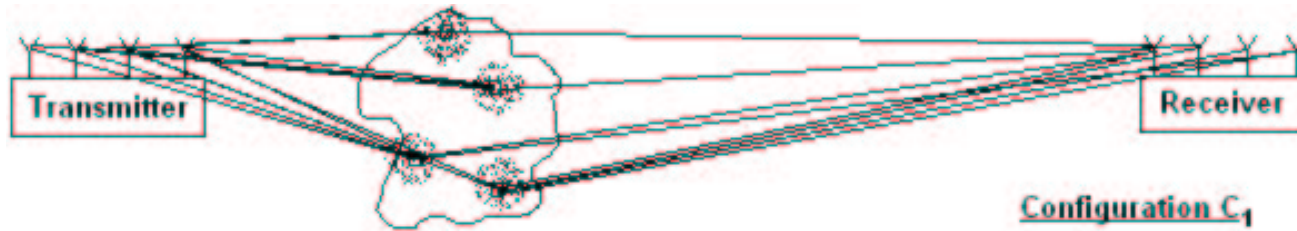
### **Pertinence de la solution.**

Dépend de la propagation entre les antennes d'émission et les antennes de réception.

Nécessité de mettre en évidence des modèles.

Antennes linéaires à capteurs équidistants.

Illustrations



1 émetteur / N récepteurs, vue directe I.

Émetteur situé très loin des antennes de réception → Front d'onde plan.

Distance entre capteurs  $d$ ,  $\theta$  angle d'arrivée mesuré par rapport à la normale au réseau de capteurs.

$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT)$  signal à transmettre,  $x_r(t) = \text{Re}(x(t)e^{2i\pi f_0 t})$  signal modulé.

Signal reçu.

$$\mathbf{y}_r(t) = A \begin{pmatrix} x_r(t - \tau_0) \\ x_r(t - \tau_0 - \tau) \\ \vdots \\ x_r(t - \tau_0 - (N - 1)\tau) \end{pmatrix}$$

$$\tau_0 = \frac{\text{distance émetteur / premier capteur}}{c}, \quad \tau = \frac{d \sin \theta}{c}.$$

$$\tau \ll T \rightarrow x(t - \tau) \simeq x(t).$$

1 émetteur / N récepteurs, vue directe II.

Enveloppe complexe du signal reçu.

$$\mathbf{y}(t) = Ae^{-2i\pi f_0 \tau_0} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2i\pi f_0 \tau} \\ \vdots \\ e^{-2i\pi(N-1)f_0 \tau} \end{pmatrix} x(t - \tau_0)$$

On pose dans la suite  $\nu = f_0 \tau$ , et  $\mathbf{D}_N(\nu) = (1, e^{-2i\pi\nu}, \dots, e^{-2i\pi(N-1)\nu})^T$ .

$$\mathbf{y}(t) = Ae^{-2i\pi f_0 \tau_0} \mathbf{D}_N(\nu) x(t - \tau_0).$$

Domaine de variation de  $\nu$ .

$$\tau \in \left[-\frac{d}{c}, \frac{d}{c}\right]. \text{ Longueur d'onde } \lambda_0 = \frac{c}{f_0}.$$

$$\nu \in \left[-\frac{d}{\lambda_0}, \frac{d}{\lambda_0}\right].$$

On choisit souvent  $d$  plus grand que  $\lambda_0$ .

$\nu$  peut prendre toute valeur dans  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  modulo 1.

## $K$ émetteurs / 1 récepteurs, vue directe I.

Emetteurs situés très loin de l'antenne de réception  $\rightarrow$  Front d'onde plan.

Distance entre capteurs  $d$ ,  $\phi$  angle entre la normale au réseau d'antennes d'émission et la direction de départ de l'onde.

$x_1(t), \dots, x_K(t)$  signaux à destination des  $K$  antennes d'émission,  
 $x_{1,r}(t), \dots, x_{K,r}(t)$  les signaux modulés correspondants.

Signal reçu.

$$y_r(t) = Ax_{1,r}(t - \delta_0) + Ax_{2,r}(t - \delta_0 - \delta) + \dots + Ax_{K,r}(t - \delta_0 - (K - 1)\delta)$$

$$\delta_0 = \frac{\text{distance premier émetteur / récepteur}}{c}, \quad \delta = \frac{d \sin \phi}{c}, \quad \mu = f_0 \delta, \quad \delta \ll T.$$

Enveloppe complexe du signal reçu.

$$y(t) = Ae^{-2i\pi f_0 \delta_0} (x_1(t - \delta_0) + e^{-2i\pi \mu} x_2(t - \delta_0) + \dots + e^{-2i\pi (K-1)\mu} x_K(t - \delta_0)).$$

$$y(t) = Ae^{-2i\pi f_0 \delta_0} \mathbf{D}_K(\mu)^T \begin{pmatrix} x_1(t - \delta_0) \\ \vdots \\ x_K(t - \delta_0) \end{pmatrix}$$

*K émetteurs / N récepteurs, vue directe.*

En utilisant les résultats précédents avec  $\tau_0 = \delta_0, \nu = \mu$ .

$$\mathbf{y}(t) = Ae^{-2i\pi f_0 \tau_0} \mathbf{D}_N(\nu) \mathbf{D}_K(\nu)^T \begin{pmatrix} x_1(t - \tau_0) \\ \vdots \\ x_K(t - \tau_0) \end{pmatrix}$$

$K$  émetteurs /  $N$  récepteurs, 1 réflecteur.

$z(t)$  enveloppe complexe du signal reçu sur le réflecteur.

$$z(t) = Ae^{-2i\pi f_0 \delta_0} \mathbf{D}_K(\mu)^T \begin{pmatrix} x_1(t - \delta_0) \\ \vdots \\ x_K(t - \delta_0) \end{pmatrix}$$

Enveloppe complexe du signal reçu sur le réseau de capteur.

$$\mathbf{y}(t) = Be^{-2i\pi f_0 \tau_0} \mathbf{D}_N(\nu) z(t - \tau_0)$$

Lien entre les signaux émis et les signaux reçus.

$$\mathbf{y}(t) = ABe^{-2i\pi f_0 (\delta_0 + \tau_0)} \mathbf{D}_N(\nu) \mathbf{D}_K(\mu)^T \begin{pmatrix} x_1(t - \delta_0 - \tau_0) \\ \vdots \\ x_K(t - \delta_0 - \tau_0) \end{pmatrix}$$



*K émetteurs / N récepteurs, beaucoup de réflecteurs.*

On suppose que  $x_k(t - \delta_{0,l} - \tau_{0,l}) \simeq x_k(t - \delta_{0,l'} - \tau_{0,l'})$  pour tous  $(l, l')$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t)$$

avec

$$\mathbf{H} = \sum_l \alpha_l \mathbf{D}_N(\nu_l) \mathbf{D}_K(\mu_l)^T$$

$$\alpha_l = A_l B_l e^{-2i\pi f_0(\delta_{0,l} + \tau_{0,l})}$$

$$\nu_l = f_0 \frac{d \sin \theta_l}{c}$$

$$\mu_l = f_0 \frac{d \sin \phi_l}{c}$$

Modéliser  $H$  par la réalisation d'une matrice aléatoire.

L'émetteur et/ou le récepteur bouge(nt): évaluation de la vitesse de variation des différents paramètres.

Sur un horizon temporel  $\Delta t$  de l'ordre de qq msec.

- Les  $\theta_l$  et  $\phi_l$  varient très lentement, de même que les  $\nu_l$  et  $\phi_l$
- Les  $A_l$  et  $B_l$  varient très lentement
- $\delta_{0,l}$  peut varier de  $\frac{v\Delta t}{c} \implies f_0\delta_{0,l}$  peut varier de  $\frac{f_0v\Delta t}{c} \simeq 0.2$  avec  $f_0 = 6\text{GHz}$ ,  
 $v = 1\text{m/sec}$ ,  $\Delta t = 10\text{msec}$ , idem pour les  $\tau_{0,l}$ .

Les phases des  $\alpha_l$  varient vite, indépendamment les unes des autres.

Interpréter les  $\alpha_l$  comme des variables aléatoires centrées indépendantes entre elles.

Loi de probabilité de  $\mathbf{H}$ .

$$\mathbf{H} = \sum_l \alpha_l \mathbf{D}_N(\nu_l) \mathbf{D}_K(\mu_l)^T$$

Grand nombre de réflecteurs : loi Gaussienne.

$$\mathbb{E}(\mathbf{H}_{m,n} \mathbf{H}_{p,q}^*) = \sum_l \mathbb{E}(|\alpha_l|^2) e^{-2i\pi((m-p)\nu_l + (n-q)\mu_l)}$$

Si on peut interpréter les  $\nu_l$  et les  $\mu_l$  comme des réalisations indépendantes de 2 v.a.  $\nu$  et  $\mu$ :

$$\mathbb{E}(\mathbf{H}_{m,n} \mathbf{H}_{p,q}^*) = \beta^2 \mathbb{E}(e^{-2i\pi(m-p)\nu}) \mathbb{E}(e^{-2i\pi(n-q)\mu}) = R_1(m-p) R_2(n-q).$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_r^{1/2} \overline{\mathbf{H}} \mathbf{R}_t^{1/2} \text{ avec } \overline{\mathbf{H}} \text{ i.i.d. Gaussienne centrée de variance 1.}$$

**Modèle de Kronecker.**