1

Filtres définis par des équations différentielles à coefficients constants

I] Introduction à la transformée de Laplace

Définition

$u(t)$ étant un signal causal ($u(t) = 0$ si $t < 0$), on appelle transformée de Laplace de $u(t)$ la fonction $U(p)$ définie par

$$U(p) = \int_0^{+\infty} u(t)\, e^{-pt}\, dt$$

U est définie sur $\left\{ p \in \mathbb{C} \;\middle|\; \int_0^{+\infty} \left| u(t)\, e^{-pt} \right| dt < +\infty \right\}$

$p = x + iy \qquad e^{-pt} = \cancel{e^{-pxt}\, e}\; e^{-xt}\, e^{-iyt}, \quad |e^{-pt}| = e^{-xt}$

$$\left\{ p\in\mathbb{C} \;\middle|\; \underbrace{\int_0^{\infty} |u(t)\, e^{-pt}|\, dt}_{\int_0^{+\infty} |u(t)|\, e^{-2t}\, dt} < +\infty \right\}$$

On peut montrer que $\left\{ p\in\mathbb{C} \;\middle|\; \int_0^{\infty} |u(t)\, e^{-pt}|\, dt < +\infty \right\} = \{ p\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p \underset{(=)}{>} \alpha \}$

où $\alpha\in\mathbb{R}$ qui dépend de $u(t)$)

Connexion avec la transformée de Fourier :

$$\begin{cases} \hat{u}(\nu) = \int_0^{+\infty} u(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt & U(p) = \int_0^{\infty} u(t)\, e^{-pt}\, dt \\ \text{définie si } \int_0^{\infty} |u(t)|\, dt < +\infty, & \hat{u}(\nu) = U(2i\pi\nu) \end{cases}$$

Exemples

$$u(t) = Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

$$U(p) = \int_0^{+\infty} u(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt$$

$$\left\{ p \in \mathbb{C},\ \int_0^{+\infty} |e^{-pt}|\, dt < +\infty \right\} \qquad p = x+iy$$

$$|e^{-pt}| = e^{-xt}$$

$$\| $$

$$\left\{ p = x+iy,\ \int_0^{\infty} e^{-xt}\, dt < +\infty \right\} = \left\{ p = x+iy \mid x = \operatorname{Re} p > 0 \right\}$$

Si $\operatorname{Re} p > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p}\left(e^{-pt}\right)_0^{+\infty}$ $\qquad \displaystyle\lim_{t \to +\infty} e^{-pt} = 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}\left(e^{-pt}\right)_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

$U(p) = \frac{1}{p}$: La transformée de Laplace de l'échelon unité d'Heaviside est la fonction $\frac{1}{p}$, et est définie si $\operatorname{Re} p > 0$

$u(t) = e^{at}\,\Upsilon(t)$, où $a \in \mathbb{C}$.

$$U(p) = \int_0^{+\infty} u(t)\,e^{-pt}\,dt = \int_0^{\infty} e^{at}\,e^{-pt}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t}\,dt$$

$U(p)$ est définie si $\operatorname{Re}(p-a) > 0 \iff \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$.

$$U(p) = \frac{-1}{p-a}\left(e^{-(p-a)t}\right)_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}$$

$a = 2i\pi\nu_0$, $u(t) = e^{2i\pi\nu_0 t}\,\Upsilon(t)$, $U(p)$ définie si $\operatorname{Re} p > 0$, $U(p) = \frac{1}{p-2i\pi\nu_0}$

$$u(t) = \cos 2\pi\nu_0 t \; Y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{2\pi\nu_0 t} Y(t) + e^{-2\pi i\nu_0 t} Y(t) \right)$$

$$U(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{p - 2i\pi\nu_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{p + 2i\pi\nu_0}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2p}{(p-2i\pi\nu_0)(p+2i\pi\nu_0)} = \frac{p}{(p-2i\pi\nu_0)(p+2i\pi\nu_0)} = \frac{p^2}{p^2 + (2\pi\nu_0)^2}$$

$U(p)$ définie si $\mathrm{Re}\, p > 0$

$u(t) = t\, e^{at}\, Y(t)$, $U(p) = \dfrac{1}{(p-a)^2}$ si $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a$.

Quelques propriétés

- Linéarité. $\mathcal{L}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)(p) = \lambda_1 \mathcal{L}(u_1)(p) + \lambda_2 \mathcal{L}(u_2)(p)$
- Dérivation et intégration

$$v(t) = \int_0^t u(s)\,ds \quad , \quad V(p) = \frac{U(p)}{p}$$

L'intégration entre 0 et t correspond à la multiplication par $\frac{1}{p}$ dans le domaine de Laplace.

$$v(t) = u'(t) \qquad V(p) = p\,U(p)$$

$$\frac{du}{dt} \longleftrightarrow p\,U(p) \qquad \int_0^t u(s)\,ds \longleftrightarrow \frac{U(p)}{p}$$

Remarque

Si $u(t)$ et $u'(t)$ ont 1 transformée de Fourier :

$$u'(t) \longleftrightarrow 2i\pi\nu\, \hat{u}(\nu)$$

$$\hat{u}(\nu) = U(2i\pi\nu)$$

$$v(t) = u'(t) \quad , \quad \hat{v}(\nu) = 2i\pi\nu\, \hat{u}(\nu)$$

$$\| $$

$$V(2i\pi\nu) = 2i\pi\nu \,.\, U(2i\pi\nu)$$

$$p = 2i\pi\nu, \quad V(p) = p\, U(p)$$

Transformée de Laplace et produit de convolution

Propriété

Si $u(t)$ et $v(t)$ sont des signaux causaux, $(u*v)(t)$ est un signal causal, et

$$(u*v)(t) = \int_0^t u(s)\,v(t-s)\,ds = \int_0^t v(s)\,u(t-s)\,ds$$

Justification

$$(u*v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(s)\,v(t-s)\,ds = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} u(s)v(t-s)\,ds}_{0} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} u(s)\,v(t-s)\,ds}_{= \int_0^t u(s)v(t-s)ds + \underbrace{\int_t^{+\infty} u(s)v(t-s)ds}_{0}}$$

Si $t \geq 0$

$v(t-s) = 0$ si $t-s<0 \Rightarrow s>t$

Si $t<0$, $t-s<0$ si $s \geq 0 \Rightarrow v(t-s)=0 \Rightarrow (u*v)(t)=0$ si $t<0$

Sa $w(t) = (u * v)(t)$, $W(p) = U(p)\, V(p)$

Illustration

$u(t) = v(t) = e^{at}\, \Upsilon(t)$ $\qquad U(p) = V(p) = \dfrac{1}{p-a}$

$w(t) = (u * v)(t) = t\, e^{at}\, \Upsilon(t)$

$W(p) = U(p)\, V(p) = (U(p))^2 = \dfrac{1}{(p-a)^2}$

Si $U(p) = \dfrac{B(p)}{A(p)}$, $\left|\begin{array}{l} \deg B < \deg A, \\ A(p) \text{ et } B(p) \text{ 2 polynômes} \end{array}\right.$ comment

calculer $u(t)$?

<u>Rappels sur la décomposition en éléments simples.</u>

Les pôles de $U(p)$ sont par définition les zéros de $A(p)$ = L'ensemble des points où $U(p)$ n'est pas définie. Si $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ sont les zéros de $A(p)$,

$$A(p) = \lambda (p - p_1) \cdots (p - p_m)$$

<u>1er cas :</u> $p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_m$ On dit que les zéros de $A(p)$ sont simples, ou encore, sont de multiplicité 1.

(Par exemple, $A(p) = (p-1)(p-2)$, par contre $A(p) = (p-1)^2$

On peut montrer que

$$U(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\lambda_1}{p-p_1} + \frac{\lambda_2}{p-p_2} + \dots + \frac{\lambda_m}{p-p_m}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ appartenant à $\mathbb{C}$.

<u>Exemple:</u> Si $U(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$ alors $U(p) = \dfrac{\lambda_1}{p-1} + \dfrac{\lambda_2}{p-2} = \dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$

Pour trouver λ_1 :

$$(p-1)\left[\frac{1}{(p-1)(p-2)}\right] = (p-1)\left(\frac{\lambda_1}{p-1} + \frac{\lambda_2}{p-2}\right)$$

$$\frac{1}{p-2} = \lambda_1 + \frac{(p-1)}{p-2}\lambda_2$$

<u>$p=1$:</u> $\lambda_1 = \left(\dfrac{1}{p-2}\right)_{p=1} = -1$

$$(p-2)\left(\frac{1}{(p-1)(p-2)}\right) = p-2\left(\frac{\lambda_1}{p-1} + \frac{\lambda_2}{p-2}\right)$$

$$\frac{1}{p-1} = \frac{(p-2)}{p-1}\lambda_1 + \lambda_2$$

$$p=2 \qquad \lambda_2 = \left(\frac{1}{p-1}\right)_{p=2} = 1$$

$$\frac{1}{(p-1)(p-2)} = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} = \frac{-(p-2)+p-1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{(p-1)(p-2)}$$

$$U(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\lambda_1}{p-p_1} + \frac{\lambda_2}{p-p_2} + \dots + \frac{\lambda_m}{p-p_m}$$

$u(t)$?

$$\frac{1}{p-a} \longleftrightarrow e^{at}\,\Upsilon(t)$$

$$\frac{1}{p-p_1} \longleftrightarrow e^{p_1 t}\,\Upsilon(t), \dots, \frac{1}{p-p_m} \longleftrightarrow e^{p_m t}\,\Upsilon(t)$$

$$u(t) = \lambda_1 e^{p_1 t}\,\Upsilon(t) + \dots + \lambda_m e^{p_m t}\,\Upsilon_m(t)$$

Si $A(p)$ a un zéro de multiplicité 2 : $p_{m-1} = p_m$

$$A(p) = \lambda (p-p_1) \cdot \cancel{(p-p_{m-2})}(p - p_{m-1})^2$$

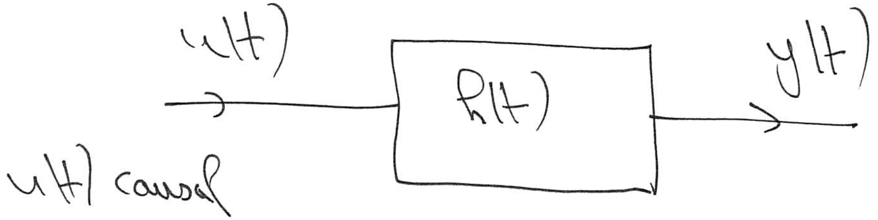
$$= \lambda (p-p_1) \cdots (p-p_{m-2})(p-p_{m-1})(p-p_{m-1})$$

$$= \lambda (p-p_1) \cdots (p-p_{m-2})(p-p_{m-1})^2$$

$$U(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\lambda_1}{p-p_1} + \cdots + \frac{\lambda_{m-2}}{p-p_{m-2}} + \frac{\lambda_{m-1}}{p-p_{m-1}} + \frac{\mu_{m-1}}{(p-p_{m-1})^2}$$

$$u(t) = \lambda_1 e^{p_1 t} + \lambda_2 e^{p_2 t} + \cdots + \underbrace{\lambda_{m-1} e^{p_{m-1} t} + \mu_{m-1} t e^{p_{m-1} t}}_{(\lambda_{m-1} + \mu_{m-1} t) e^{p_{m-1} t}}$$

Lien avec le filtrage.



$$y(t) = (h * u)(t) = \int_0^t h(s)\, u(t-s)\, ds$$

$$Y(p) = H(p)\, U(p)$$

$$H(p) = \int_0^{\infty} h(t)\, e^{-pt}\, dt$$, aussi appelée fonction de transfert.

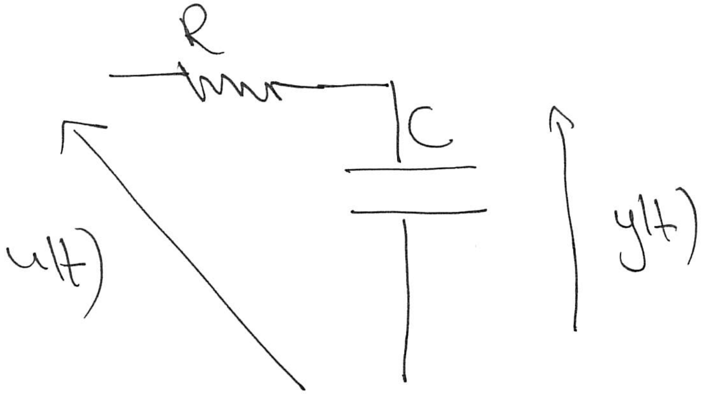
Filtres définis par des équations différentielles à coefficients constant

Exemple

$$y(t) + a\,y'(t) = u(t)$$

$u(t)$ entrée, $u(t) = 0$ $t < 0$

$y(t)$ sortie, $y(t) = 0$ $t < 0$



$$y(t) + RC\,y'(t) = u(t)$$

On prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle.

$$Y(p) + ap\,Y(p) = U(p) \Rightarrow Y(p)(1 + ap) = U(p)$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{U(p)}{1+ap} \qquad H(p) = \frac{1}{1+ap}$$

Cas général

$m < n$

$$y(t) + a_1 y'(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t) = b_0 u(t) + b_1 u'(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t)$$

$u(t) = 0 \quad t < 0, \qquad y(t) = 0 \quad t < 0$

$$Y(p) + a_1 p Y(p) + \dots + a_n p^n Y(p) = b_0 U(p) + b_1 p U(p) + \dots + b_m p^m U(p)$$

$$Y(p) \underbrace{\left(1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n\right)}_{A(p)} = U(p) \underbrace{\left(b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m\right)}_{B(p)}$$

$$Y(p) = \underbrace{\frac{B(p)}{A(p)}}_{H(p)} U(p)$$