Influence d'une dilatation Cours du 19/11 

$$g(t) = f(at) \quad \text{où} \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\hat{g}(\nu) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

$a > 0$

$$\hat{g}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

$u = at$, $t = \frac{u}{a}$

$du = a\,dt \Rightarrow dt = \frac{1}{a} du$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-2i\pi\nu\frac{u}{a}}\, \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-2i\pi\nu\frac{u}{a}}\, du}$$

$$\hat{g}(\nu) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

# Transformée de Fourier et dérivation

**Proposition** Soit $f$ une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $g(t) = t\,f(t)$ appartient également à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |t\,f(t)|\,dt < +\infty$

Alors, $\nu \longrightarrow \hat{f}(\nu)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (continûment dérivable))

et $$\hat{f}'(\nu) \triangleq \frac{d\hat{f}(\nu)}{d\nu} = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\,dt = -2i\pi\,\hat{g}(\nu)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \hat{g}(\nu) = -\frac{1}{2i\pi}\,\hat{f}'(\nu)$$

Illustration. $f(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ $\quad \hat{f}(\nu) = \dfrac{1}{1+2i\pi\nu}$

$$g(t) = t\,e^{-t}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \qquad \hat{g}(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\,\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{1+2i\pi\nu}\right) = \frac{-1}{2i\pi} \times \frac{-2i\pi}{(1+2i\pi\nu)^2} = \frac{1}{(1+2i\pi\nu)^2}$$

3

$$t f(t) \longleftrightarrow \frac{-1}{2i\pi} \frac{d\hat{f}(\nu)}{d\nu} \Longrightarrow \frac{d\hat{f}(\nu)}{d\nu} \longleftrightarrow -2i\pi t f(t)$$

<u>Preuve</u>

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t)\, e^{-2i\pi\nu t}}_{h(t,\nu)}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\nu)\, \cancel{e^{-2i\pi\nu t}}\, dt$$

$$|h(t,\nu)| = |f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$$

$\forall t, \quad \nu \longrightarrow h(t,\nu)$ est de classe $C^1$

$$\left|\frac{\partial h(t,\nu)}{\partial \nu}\right| = \left|-2i\pi t\, f(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\right| = \underbrace{2\pi\, |t f(t)|}_{\in L^1(\mathbb{R})}$$

$\Longrightarrow \nu \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\nu)\, dt$ est de classe $C^1$

$$\frac{d}{d\nu}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\nu)\, dt\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial h(t,\nu)}{\partial \nu}\, dt = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

<u>Généralisation</u> Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $t^p f(t) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

Alors, $\nu \to \hat{f}(\nu)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ ( $p$ fois continument dérivable )

et $\forall\, 1 \leq k \leq p$, $\hat{f}^{(k)}(\nu) = (-2i\pi)^k \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$

$$t^k f(t) \longleftrightarrow \frac{-1}{(2i\pi)^k} \hat{f}^{(k)}(\nu)$$

<u>Preuve</u>

$f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $t^p f(t) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall\, 1 \leq k \leq p,\ t^k f(t) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ )

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t^k f(t)|\, dt = \int_{-1}^{+1} \underbrace{|t^k|}_{|t|^k} |f(t)|\, dt + \int_{[-1,1]^c} |t|^k |f(t)|\, dt \qquad [-1,1]^c = ]-\infty,-1[ \cup ]1,+\infty[$$

Si $t \in [-1,1]$, $|t| \leq 1 \Rightarrow |t|^k \leq 1$

$\int_{-1}^{1} |t|^k |f(t)|\, dt \leq \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt < +\infty$

$|t| > 1 \Rightarrow |t|^k \leq |t|^p$ si $k \leq p$

$\int_{[-1,1]^c} |t|^k |f(t)|\, dt \leq \int_{[-1,1]^c} |t|^p |f(t)|\, dt < +\infty$

Preuve si $k = 2$

$$t^2 f(t) \xrightarrow{\cancel{TF}} \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^2 \hat{f}^{(2)}(\nu)$$

$$g(t) = t f(t) \qquad \hat{g}(\nu) = -\frac{1}{2i\pi} \hat{f}'(\nu)$$

$$\underline{t g(t)} = t^2 f(t) \in L^1(\mathbb{R})$$

$h(t)$, $\hat{h}(\nu) = -\frac{1}{2i\pi} \hat{g}'(\nu) = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^2 \hat{f}''(\nu)$

$\nu \to \hat{g}(\nu)$ est classe $\mathcal{C}^1$ $\longrightarrow$ $\hat{f}'(\nu)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ $\longrightarrow$ $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$

<u>Proposition</u> Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et $f' \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Alors, la transformée de Fourier de $g(t) = f'(t)$ est donnée par : $\hat{g}(\nu) = 2i\pi\nu \hat{f}(\nu)$

$$\frac{d}{dt} f(t) \longleftrightarrow 2i\pi\nu \hat{f}(\nu)$$

Remarque : $-2i\pi t f(t) \longleftrightarrow \dfrac{d\hat{f}(\nu)}{d\nu}$

<u>Preuve</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = \left[ f(t) e^{-2i\pi\nu t} \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\nu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt}_{\hat{f}(\nu)}$$

$u(t) = e^{-2i\pi\nu t}$ $\qquad u'(t) = -2i\pi\nu e^{-2i\pi\nu t}$

$v'(t) = f'(t)$ $\qquad v(t) = f(t)$

7

$$\underbrace{\lim_{t\to+\infty} f(t)}_{} = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0 \Rightarrow \left[ f(t)\, e^{-2i\pi\nu t} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\, ds$$

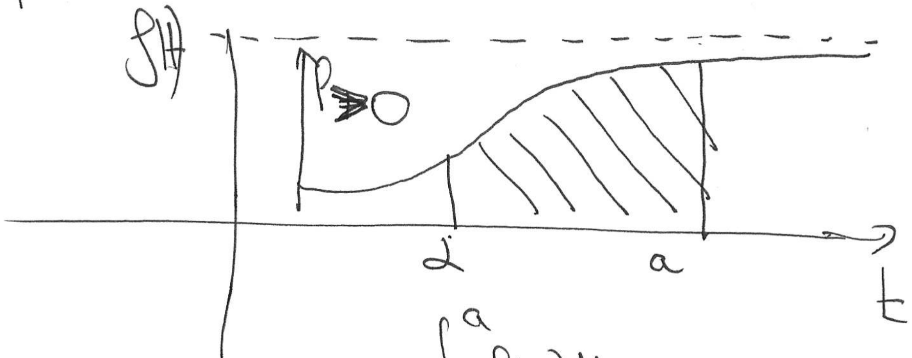
$$\left| f(t)\, e^{-2i\pi\nu t} \right| = |f(t)| \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(t)\, e^{-2i\pi\nu t} \longrightarrow 0$$

Comme $f' \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $\int_0^{+\infty} f'(s)\, ds$ est convergente $\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \int_0^t f'(s)\, ds$ existe

et est finie. $\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe et est finie. $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

implique que cette limite est nécessairement nulle




$f(t) \to l$ si $t \to +\infty$

Il existe $A$ tel que $f(t) > \frac{l}{2}$

$\forall t > A \Rightarrow \int_A^B f(t)\,dt > \int_A^B \frac{l}{2}\,dt = \frac{l}{2}(B-A)$

$\int_\alpha^a f(t)\,dt \to +\infty$ si $a \to +\infty \Rightarrow f$ ne peut appartenir à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

Généralisation.

Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ est classe $\mathcal{C}^p$, et si $f', \dots, f^{(p)}$ appartiennent à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors, $\forall\ 1 \leq k \leq p$,

$$\widehat{\left(f^{(k)}\right)}(\nu) = (2i\pi\nu)^k \hat{f}(\nu)$$

Produit de convolution et transformée de Fourier

<u>Proposition</u> Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Alors, si $h = f * g$, $\hat{h}(\nu) = \hat{f}(\nu)\,\hat{g}(\nu)$

$$(s,t) \to \underbrace{f(s)g(t-s)e^{-2i\pi}}_{h(s,t)}$$

<u>Preuve</u>

$$\hat{h}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \int^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)\, ds \right) e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

9

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |h(s,t)|\, ds\, dt < +\infty$$

$$h(s,t) = f(s)\, g(t-s)\, e^{-2i\pi\nu t}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |h(s,t)|\, ds\, dt = \int_{\mathbb{R}^2} |f(s)|\, |g(t-s)|\, ds\, dt \qquad \left|\begin{array}{l} u = s \\ v = t-s \end{array}\right.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} |f(u)|\, |g(v)|\, du\, dv = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\, du \int_{\mathbb{R}} |g(v)|\, dv < +\infty$$

$$\hat{h}(\nu) = \int_{\mathbb{R}^2} h(s,t)\, ds\, dt = \int_{\mathbb{R}^2} f(s)\, g(t-s)\, e^{-2i\pi\nu t}\, ds\, dt \qquad e^{-2i\pi\nu t} = e^{-2i\pi\nu s}\, e^{-2i\pi\nu(t-s)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(s)\, e^{-2i\pi\nu s}\, g(t-s)\, e^{-2i\pi\nu(t-s)}\, ds\, ds = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)\, e^{-2i\pi\nu u}\, g(v)\, e^{-2i\pi\nu v}\, du\, dv = \hat{f}(\nu)\, \hat{g}(\nu)$$

Illustration

$$f(t) = g(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

$$h(t) = (f * g)(t) = t\,e^{-t}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

$$\hat{h}(\nu) = \hat{f}(\nu)\,\hat{g}(\nu) \qquad \hat{f}(\nu) = \hat{g}(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu}$$

$$\hat{h}(\nu) = \frac{1}{(1+2i\pi\nu)^2}$$

## Théorème d'inversion

Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ $\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\nu)| \, d\nu < +\infty \right)$

Dans ce cas, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} \, d\nu$

$$\left( \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} \, dt \right)$$

## Application partielle

Identité de Parseval

Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ $\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt < +\infty \right)$. Alors, $\hat{f} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$,

et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 \, d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt$

12

On admet ~~que~~ $\hat{f} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

On définit $\tilde{f}(t) = \left(f(-t)\right)^* \Rightarrow \hat{\tilde{f}}(\nu) = \left(\hat{f}(\nu)\right)^*$

$g(t) = \left(f * \tilde{f}\right)(t) = \int f(s)\, \tilde{f}(t-s)\, ds$ $\qquad \tilde{f}(t-s) = \left(f(s-t)\right)^*$

$g(t) = \int f(s)\, f^*(s-t)\, ds \qquad g(0) = \int |f(s)|^2\, ds$

$\hat{g}(\nu) = \hat{f}(\nu)\, \hat{\tilde{f}}(\nu) = |\hat{f}(\nu)|^2 \qquad \hat{f}(\nu) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{g}(\nu) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

Par le théorème d'inversion : $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}),\ \hat{g} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \quad g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, f^*(s-t)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\nu)|^2\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu \quad \forall t$

$t=0 \qquad g(0) = \int |f(s)|^2\, ds = \int |\hat{f}(\nu)|^2\, d\nu$

Parseval généralisé.

Si $f$ et $g$ appartiennent à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, alors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)\, \left(\hat{g}(\nu)\right)^* d\nu$$

( on a démontré précédemment ceci pour $g = f$ )