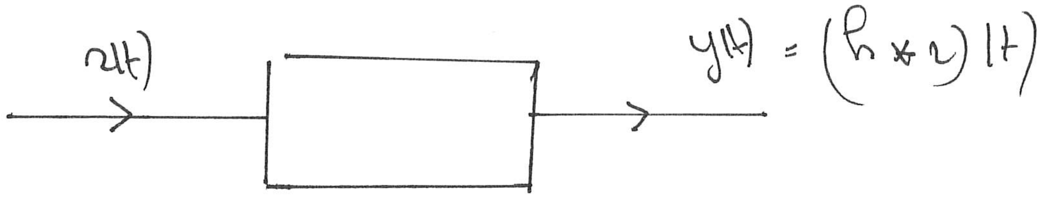
Notes du cours du 11/10/2021

Filtrage analogique

I] Définitions et premiers exemples



Un filtre est un dispositif physique qui, lorsque on lui applique à son entrée un signal $x(t)$, produit en sortie le signal $y(t) = (h * x)(t)$ où $h(t)$ est une fonction appelée réponse impulsionnelle du filtre

Propriétés de $h(t)$:

Si $x(t) = \delta(t)$, $y(t) = (h * x)(t) = h(t)$, d'où le nom réponse impulsionnelle (réponse à l'impulsion de Dirac à $t=0$). Comme $\delta(t) = 0$ si $t<0$, $h(t) = 0$ si $t<0$ également. On dit que le filtre est causal en ce sens que $y(t) = \int_0^{\infty} h(s)\, x(t-s)\, ds$ ne dépend que des valeurs prises par x avant l'instant t.

Exemples basiques

$$h(t) = 1 \quad \text{si } t \geq 0$$
$$= 0 \quad \text{ailleurs}$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t-s)\,ds = \int_{-\infty}^{t} x(s)\,ds$$: filtre intégrateur.

$$h(t) = \frac{1}{T} \quad \text{si } t \in [0, T]$$
$$= 0 \quad \text{ailleurs}$$

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_0^{T} x(t-s)\,ds = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(s)\,ds$$: filtre moyenneur.

II] Stabilité et fonction de transfert

Définition On dit qu'un filtre est stable si toute entrée bornée produit une sortie également bornée.

Propriété Un filtre est stable si et seulement si $\int_0^{\infty} |h(t)|\,dt$ où h est la réponse impulsionnelle du filtre.

Fonction de transfert d'un filtre stable

Si $\int_0^\infty |h(t)|\,dt < +\infty$, sa transformée de Fourier

$$\hat{h}(\nu) = \int_0^\infty h(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$ existe. La relation

d'entrée-sortie $y(t) = (h * x)(t)$ peut alors s'écrire dans le domaine fréquentiel sous la forme : $\hat{y}(\nu) = \hat{h}(\nu)\,\hat{x}(\nu)$.

C'est cette propriété qui permet de voir qu'un filtre peut être utilisé pour supprimer des bandes de fréquences dans le signal d'entrée en concevant $h(t)$ pour que $\hat{h}(\nu) \simeq 0$ dans les bandes en question.

Filtre stable en régime harmonique

On applique au filtre $x(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t + \varphi)$. Alors, la sortie $y(t) = (h * x)(t) = A\,|\hat{h}(\nu_0)|\cos(2\pi\nu_0 t + \varphi + \operatorname{Arg}\hat{h}(\nu_0))$.

Preuve :

$$x(t) = \frac{A}{2}\left(e^{2i\pi\nu_0 t} e^{i\varphi} + e^{-2i\pi\nu_0 t} e^{-i\varphi}\right)$$

(4)

$$y(t) = \int_0^\infty h(s)\, x(t-s)\, ds = \frac{A}{2}\left(\int_0^\infty h(s)\, e^{2i\pi\nu_0(t-s)} e^{i\varphi}\, ds + \int_0^\infty h(s)\, e^{-2i\pi\nu_0(t-s)} e^{-i\varphi}\, ds\right)$$

$$= \frac{A}{2}\left[e^{2i\pi\nu_0 t} e^{i\varphi} \underbrace{\int_0^\infty h(s)\, e^{-2i\pi\nu_0 s}\, ds}_{\hat{h}(\nu_0)} + e^{-2i\pi\nu_0 t} e^{-i\varphi} \underbrace{\int_0^\infty h(s)\, e^{2i\pi\nu_0 s}\, ds}_{\hat{h}(-\nu_0) = (\hat{h}(\nu_0))^*} \right]$$

$$(\hat{h}(\nu_0)) = |\hat{h}(\nu_0)|\, e^{i \operatorname{Arg} \hat{h}(\nu_0)}$$

$$\Rightarrow y(t) = A\,|\hat{h}(\nu_0)| \cos\left(2\pi\nu_0 t + \varphi + \operatorname{Arg} \hat{h}(\nu_0)\right)$$

Régime transitoire / régime permanent

En pratique, on applique plutôt l'entrée $u(t)$ définie par $u(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t + \varphi) = x(t)$ si $t \geq 0$
$= 0$ si $t < 0$

Soit $z(t)$ la sortie. Alors, pour t petit, $z(t)$ diffère de $y(t)$, mais si on attend un "certain temps", $y(t)$ et $z(t)$ deviennent très proches

$z(t) = 0$ si $t < 0$, $\quad z(t) = \int_0^t h(s)\, u(t-s)\, ds = \int_0^t h(s)\, u(t-s)\, ds$

$$\Rightarrow \quad y(t) - z(t) = \int_t^\infty h(s)\, u(t-s)\, ds$$

$$|y(t) - z(t)| \leq \int_t^\infty |h(s)|\, |u(t-s)|\, ds$$

$$|u(t)| \leq A \quad \forall t \Rightarrow |y(t) - z(t)| \leq A \int_t^\infty |h(s)|\, ds \xrightarrow[\text{si } t \to +\infty]{} 0$$

La vitesse à laquelle le régime transitoire s'éteint dépend de la vitesse avec laquelle $h(t)$ tend vers 0 si $t \to +\infty$.