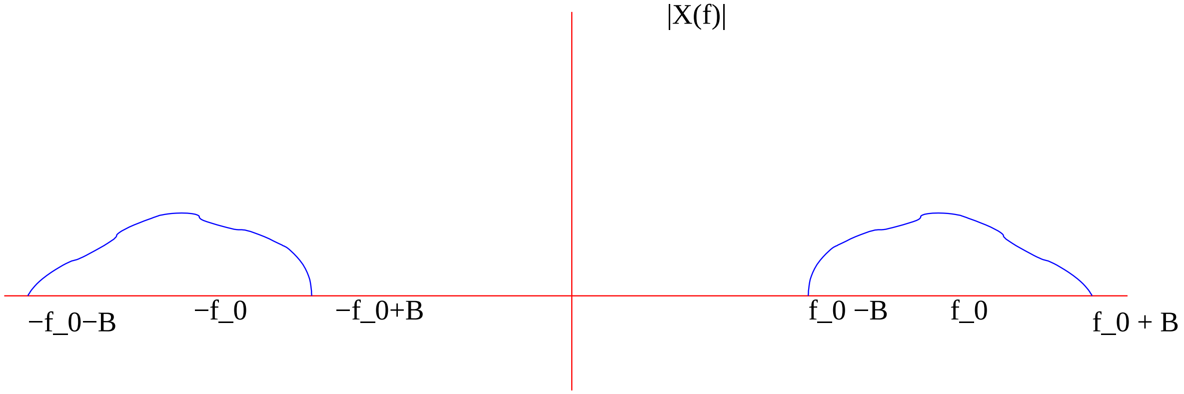
Signaux passe-bande et enveloppe complexe.

Motivation

Beaucoup de signaux $x(t)$ sont passe-bande.



Représenter $x(t)$ en faisant apparaitre un signal de bande passante $[-B, B]$.

Résultat essentiel:

Il existe un signal complexe $w(t) = u(t) + iv(t)$ de bande passante $[-B, B]$ tel que

$$x(t) = Re(w(t)e^{2i\pi f_0 t}) = u(t)\cos(2\pi f_0 t) - v(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$w(t)$ **est appelé l'enveloppe complexe de** $x(t)$

Filtre de Hilbert I.

Le filtre de Hilbert est le filtre de fonction de transfert $Q(f) = -i \text{ signe}(f)$.

$Q(-f) = Q(f)^*$ implique que $Q(f)$ est la TF d'une fonction réelle $q(t)$.

On appelle $\tilde{x}(t)$ la sortie du filtre $Q(f)$ excité par $x(t)$.

Exemple fondamental.

Si $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, alors $\tilde{x}(t) = \sin(2\pi f_0 t + \phi)$.

Si $\phi = 0$, vient de $-i \text{ signe}(f)(\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}) = \frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2i}$

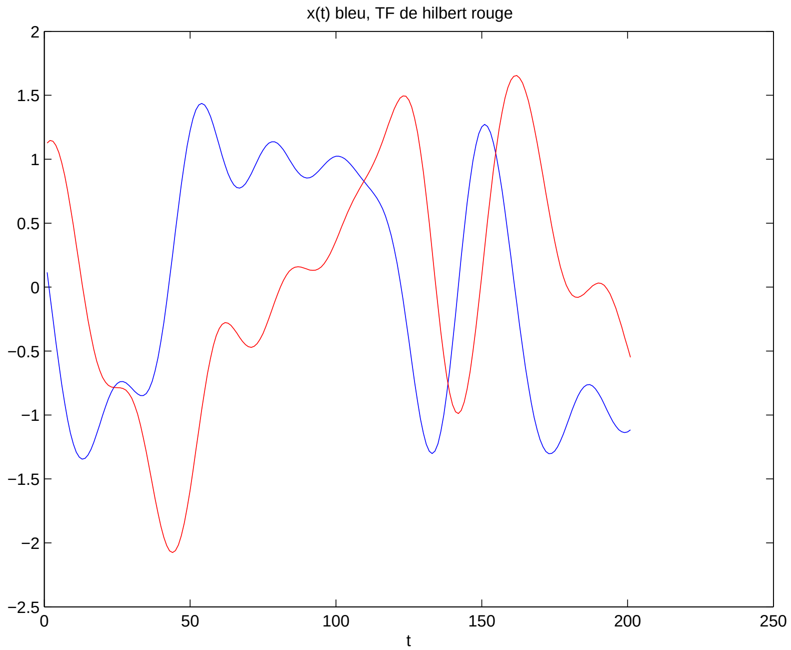
Filtre de Hilbert II.

Cas plus général.

Si $x(t) = \int_0^\infty C(f)\cos(2\pi f t + \phi(f))df$, alors

$\tilde{x}(t) = \int_0^\infty C(f)\sin(2\pi f t + \phi(f))df$

Illustration.



Filtre analytique I

Le filtre analytique est le filtre de fonction de transfert $A(f)$ définie par

$$\begin{aligned} A(f) = 1 + iQ(f) &= 0 \text{ si } f < 0 \\ &= 2 \text{ si } f > 0 \end{aligned}$$

$A(-f) \neq A(f)^* \Rightarrow$ la réponse impulsionnelle est complexe.

$z(t)$ sortie du filtre analytique excité par $x(t)$:

$z(t) = x(t) + i\tilde{x}(t)$

$$\begin{aligned} Z(f) &= 0 \text{ si } f < 0 \\ &= 2X(f) \text{ si } f > 0 \end{aligned}$$

Filtre analytique II

Exemple fondamental

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, alors $z(t) = e^{i(2\pi f_0 t + \phi)}$.

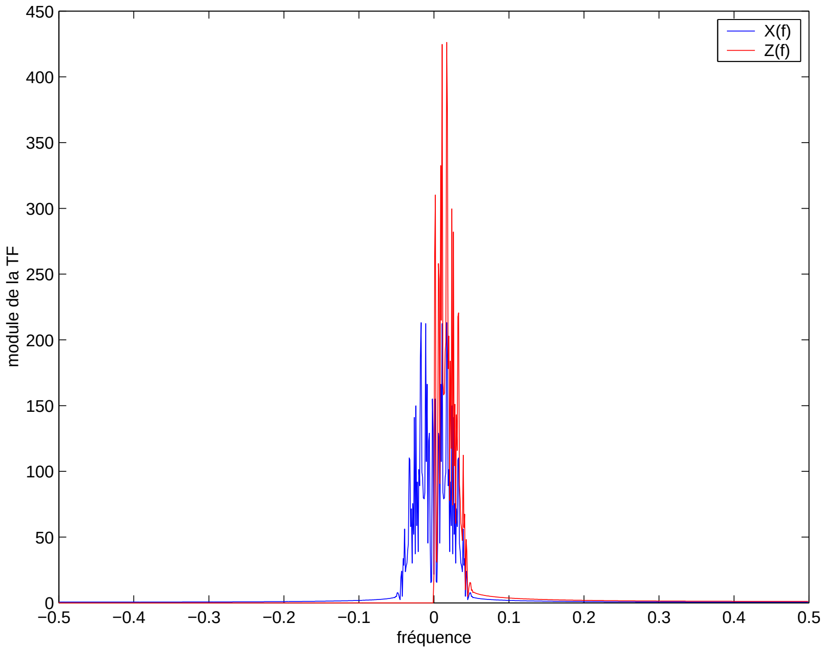
Cas plus général.

Si $x(t) = \int_0^\infty C(f) \cos(2\pi f t + \phi(f)) df$, alors

$z(t) = \int_0^\infty C(f) \exp i(2\pi f t + \phi(f)) df = 2 \int_0^\infty X(f) e^{2i\pi f_0 t} dt$.

Filtre analytique III

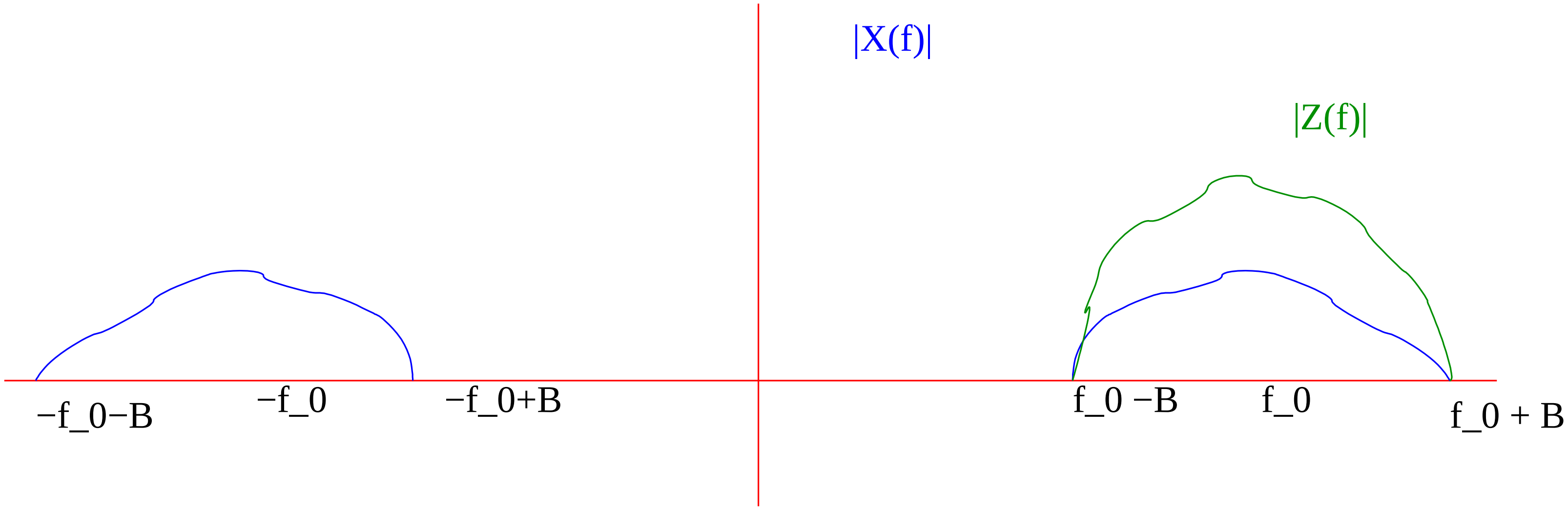
Visualisation dans le domaine fréquentiel



L'enveloppe complexe d'un signal passe-bande I

$x(t)$ signal tel que $X(f) \neq 0$ si $f \in [f_0 - B, f_0 + B] \cup [-f_0 - B, -f_0 + B]$.

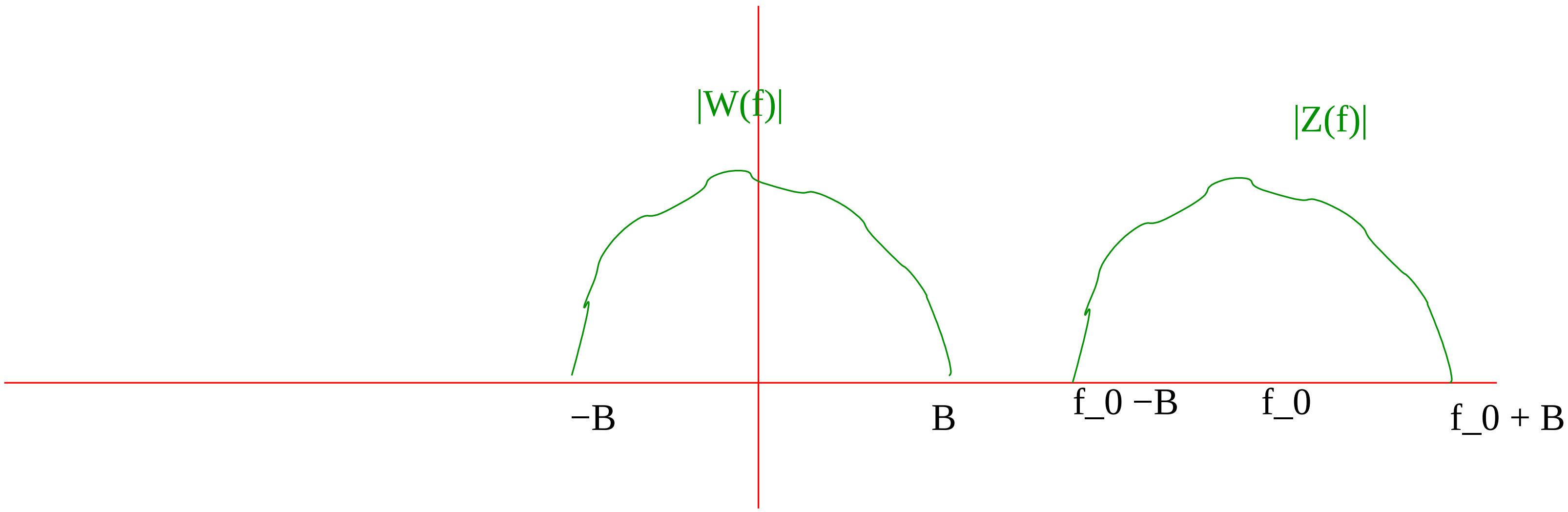
Soit $z(t)$ le signal analytique associé à $x(t)$.



L'enveloppe complexe d'un signal passe-bande II

$Z(f) \neq 0$ si $f \in [f_0 - B, f_0 + B]$.

On définit $w(t) = u(t) + iv(t)$ par $W(f) = Z(f + f_0) \Longleftrightarrow w(t) = z(t)e^{-2i\pi f_0 t}$.

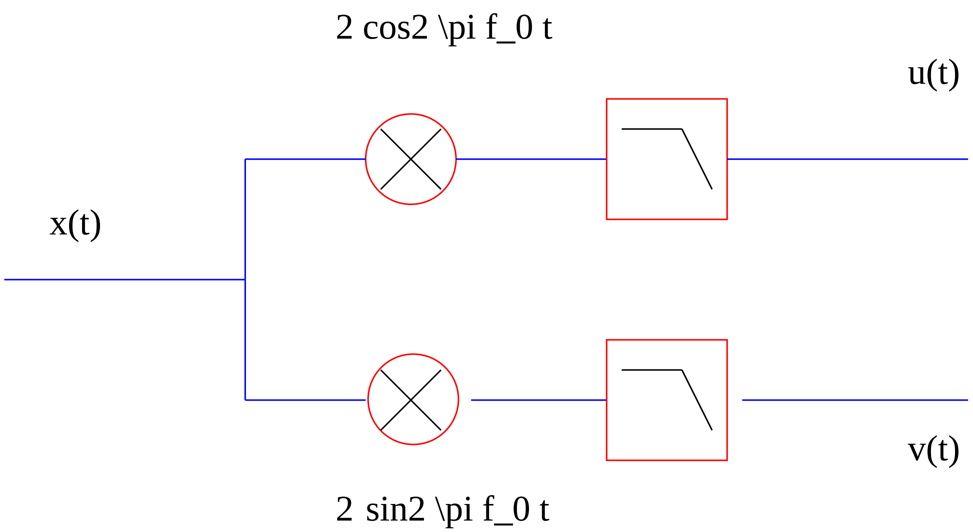


Propriétés de $w(t)$.

- $W(f) \neq 0$ ssi $f \in [-B, B]$
- $x(t) = \mathrm{Re}(z(t)) = \mathrm{Re}(w(t)e^{2i\pi f_0 t}) = u(t)\cos(2\pi f_0 t) - v(t)\sin(2\pi f_0 t)$.

L'enveloppe complexe d'un signal passe-bande III

Comment générer l'enveloppe complexe de $x(t)$?



L'enveloppe complexe d'un signal passe-bande IV

Conclusion.

Si $x(t)$ est passe-bande, il existe un unique signal complexe $w(t)$ de bande $[-B, B]$ tel que

$$x(t) = \mathrm{Re}(w(t)e^{2i\pi f_0 t})$$

Exemple: démodulation

$x(t)$ signal réel modulant de bande $[-B, B]$.

$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ signal modulé de bande $[f_0 - B, f_0 + B] \cup [-f_0 - B, -f_0 + B]$.

$By(t-\tau) = Bx(t-\tau)\cos(2\pi f_0(t-\tau))$ signal reçu de bande $[f_0 - B, f_0 + B] \cup [-f_0 - B, -f_0 + B]$.

$By(t-\tau) = \mathrm{Re}(Bx(t-\tau)e^{-2i\pi f_0 \tau} e^{2i\pi f_0 t})$.

Enveloppe complexe $= x(t-\tau)e^{-2i\pi f_0 \tau}$, et
$u(t) = x(t-\tau)\cos(2\pi f_0 \tau), v(t) = -x(t-\tau)\sin(2\pi f_0 \tau)$.