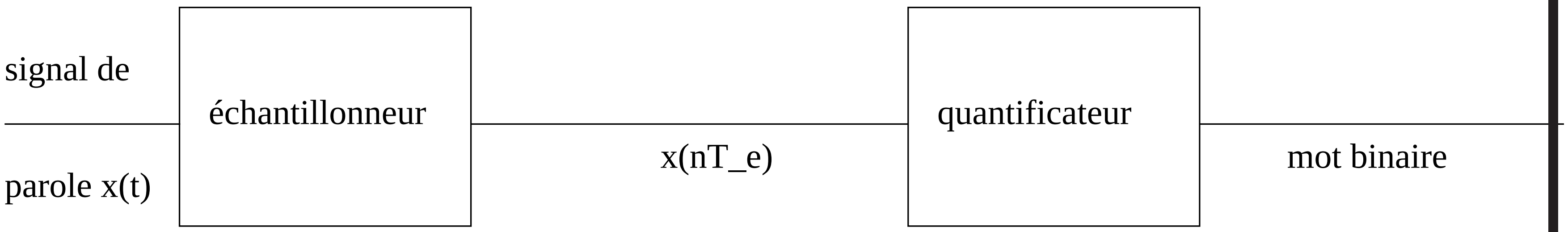
Echantillonnage et signaux à temps discret.

Motivation

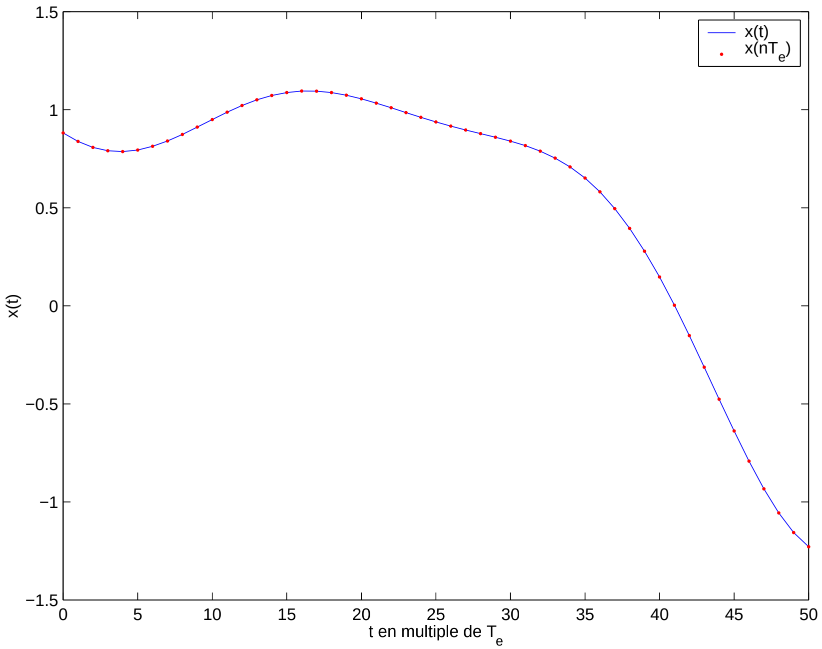


Questions.

- Comment choisir T_e ?
- Comment reconsituer le signal $x(t)$ à partir des bits qui le représentent ?

T_e période d'échantillonnage, $F_e = \frac{1}{T_e}$ fréquence d'échantillonnage.

Reformulation.



Peut-on reconstituer de façon unique la courbe bleue à partir des points rouges ?

Théorème de Shannon.

Soit $x(t)$ un signal de bande passante $[-B, B]$. Alors, si $T_e < \frac{1}{2B} \Longleftrightarrow B < \frac{F_e}{2}$, la fonction $x(t)$ est définie de façon unique par la suite $(x(nT_e))_{n\in\mathbb{Z}}$. De plus,

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e) \frac{\sin(\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e})}{\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e}}$$

$x(t)$ est la seule courbe suffisement douce passant par les points $(x(nT_e))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Preuve du théorème de Shannon I.

Basée sur la formule sommatoire de Poisson. Formule fondamentale qui possède son intérêt propre.

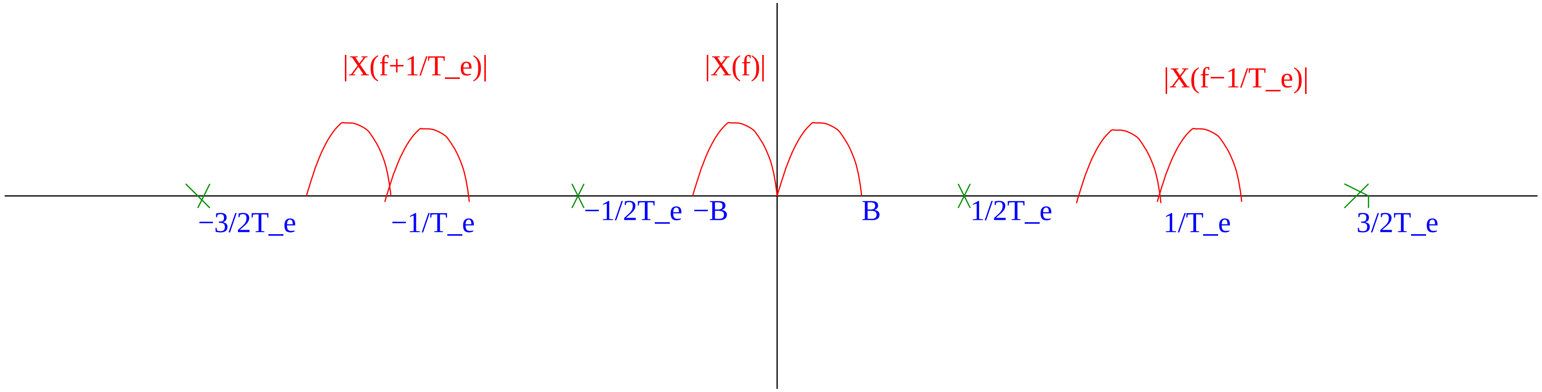
Soit $x(t)$ une fonction et $X(f)$ sa TF. Alors:

$$T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) e^{-2i\pi n f T_e} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - \frac{k}{T_e})$$

Preuve du théorème de Shannon II.

Soit $Y(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(f - \frac{k}{T_e}) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)e^{-2i\pi n f T_e}$

Si $T_e < \frac{1}{2B} \Longleftrightarrow B < \frac{1}{2T_e}$.



$X(f) = Y(f)$ sur $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$.

$x(t) = \int_{-B}^{B} X(f)e^{2i\pi f t}df = \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} Y(f)e^{2i\pi f t}df$.

On remplace $Y(f)$ par son expression $\Rightarrow$ formule d'interpolation de Shannon.

Application aux convertisseurs numériques analogiques I.

Comment générer concrètement le signal $x(t)$ à partir de la suite $(x(nT_e))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Soit $h(t)$ une fonction telle que

$$\begin{aligned} H(f) &= 1 \text{ si } f \in [-B, B] \\ &= 0 \text{ si } f \notin [-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}] \end{aligned}$$

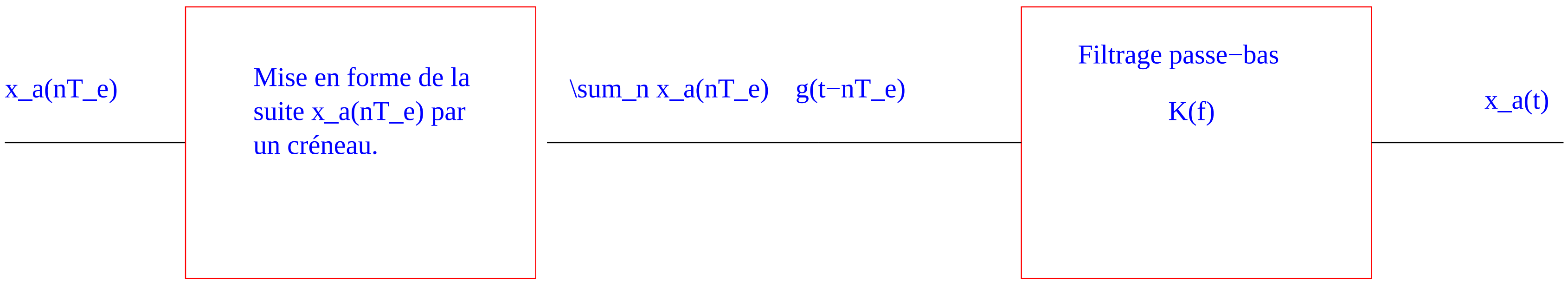
Alors :

$$x(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e) h(t - nT_e)$$

Si $h(t) = \frac{sin(\pi t/T)}{\pi t}$, on retrouve la formule de Shannon.

Application aux convertisseurs numériques analogiques II.

Principe général.

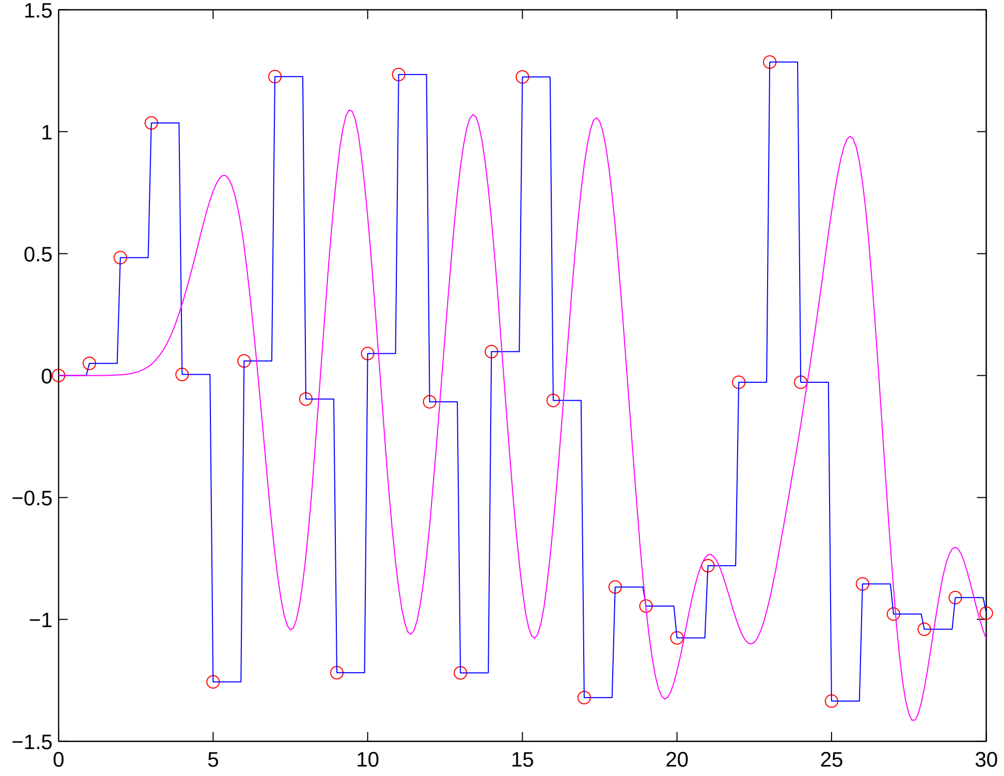


K(f) G(f) = 1 sur [−B, B]

K(f) = 0 hors de [−1/2T_e,1/2T_e]

Application aux convertisseurs numériques analogiques III.

Un exemple avec un filtre passe-bas non optimisé



Signaux à temps discrets. Généralités

Signal à temps discret = suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Exemple typique : $x_n = x_a(nT_e)$ où $x_a(t)$ est un signal à temps continu et T_e sa période d'échantillonnage.

Signaux à temps discrets. Transformée de Fourier, I

$X(f)$ la transformée de Fourier de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la fonction définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par:

$$X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi nf}$$

Bien défini si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n|^2 < \infty$: signal d'énergie finie.

La variable f est appelée fréquence normalisée.

Signaux à temps discrets. Transformée de Fourier, II

Justification de l'expression fréquence normalisée.

$x_n = x_a(nT_e)$ où $x_a(t)$ est de bande passante $[-B, B]$ et $B < \frac{1}{2T_e}$.

Grâce à la formule de Poisson :

$$X_a(\nu) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n \nu T_e} \text{ si } \nu \in [-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$$

On pose alors $f = \nu T_e = \frac{\nu}{F_e}$ qui appartient à $[-1/2, 1/2]$:

$$X(f) = F_e X_a(f F_e) \text{ si } f \in [-1/2, 1/2]$$

Aux renormalisations près, TF du signal à temps discret $(x_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$ = TF du signal à temps continu $x_a(t)$.

Quelques propriétés de la TF.

Philosophie : mêmes types de propriétés que la TF des signaux à temps continu.

$X(f) = \text{TF de } x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

- Si x est réel, $X(-f) = X(f)^*$
- TF de $(x_{n-n_0})_{n \in \mathbb{Z}} = e^{-2i\pi n_0 f} X(f)$
- TF de $e^{2i\pi n f_0} = \delta(f - f_0)$
- Si x est réel, $x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{2i\pi n f} df = \int_0^{1/2} C(f) \cos(2\pi n f + \phi(f)) df$ avec $X(f) = \frac{C(f)}{2} e^{i\phi(f)}$.

Retard temporel $\Longleftrightarrow$ multiplication fréquentielle par $e^{-2i\pi f}$

Filtrage des signaux à temps discret I

Produit de convolution de signaux à temps discret x et y : $z = x * y$:

$$z_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k}$$

Mêmes propriétés que dans le cas des signaux à temps continus: en particulier;

TF de $x * y = X(f)Y(f)$

Filtrage des signaux à temps discret II

colorgreen Filtre = dispositif tel que :

$y_n = (h * x)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$

x est l'entrée du filtre, y la sortie du filtre, et h est sa réponse impulsionnelle.

- Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) si seuls un nombre fini de h_k sont non nuls
- Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) dans le cas contraire

Si $h_k = 0$ si $k < k_0$, alors, il n'a pas besoin d'être causal pour être implanté.

Filtrage des signaux à temps discret III

$H(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2i\pi k f}$ est la fonction de transfert.

Relation d'entrée / sortie dans le domaine fréquentiel :

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Même utilisation que les filtres à temps continu : couper des bandes de fréquences.

Filtrage des signaux à temps discret IV : filtres récursifs

Filtres RII particuliers

Exemple simple : filtre défini par l'équation $y_n - a y_{n-1} = x_n$ pour tout n

Sous-entendu : $x_n = 0$ si $n < 0$, $y_n = 0$ si $n < 0$.

- Instant $n = 0$: $y_0 = x_0$
- Instant $n = 1$: $y_1 - a y_0 = x_1 \Rightarrow y_1 = x_1 + a x_0$
- Instant n : $y_n - a y_{n-1} = x_n \Rightarrow y_n = x_n + a x_{n-1} + \ldots + a^n x_0$

$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x_{n-k}$: filtre de réponse impulsionnelle définie par

$$\begin{aligned} h_k &= 0 \text{ si } k < 0 \\ &= a^k \text{ si } k \geq 0 \end{aligned}$$

Filtrage des signaux à temps discret V : filtres récursifs

Fonction de transfert : $Y(f)(1 - ae^{-2i\pi f}) = X(f)$

$H(f) = \frac{1}{1-ae^{-2i\pi f}}$

Réponse impulsionnelle à partir de $H(f)$.

$\frac{1}{1-ae^{-2i\pi f}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-2ik\pi f}$ d'où $h_k = a^k$ si $k \geq 0$.

Filtrage des signaux à temps discrets VI : filtres récursifs

Le cas général.

$y_n + \sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k} = \sum_{l=0}^{q} b_l x_{n-l}$, $x_n = 0, y_n = 0$ si $n < 0$.

Facile de voir que $y_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k}$

Fonction de transfert $H(f) = \frac{\sum_{k=l}^{q} b_l e^{-2il\pi f}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k e^{-2ik\pi f}}$

Développer $H(f)$ en série entière de $e^{-2i\pi f}$ pour obtenir la réponse impulsionnelle.

Filtrage des signaux à temps discrets VII : stabilité des filtres récursifs

Un filtre est stable si toute entrée bornée produit une sortie bornée.

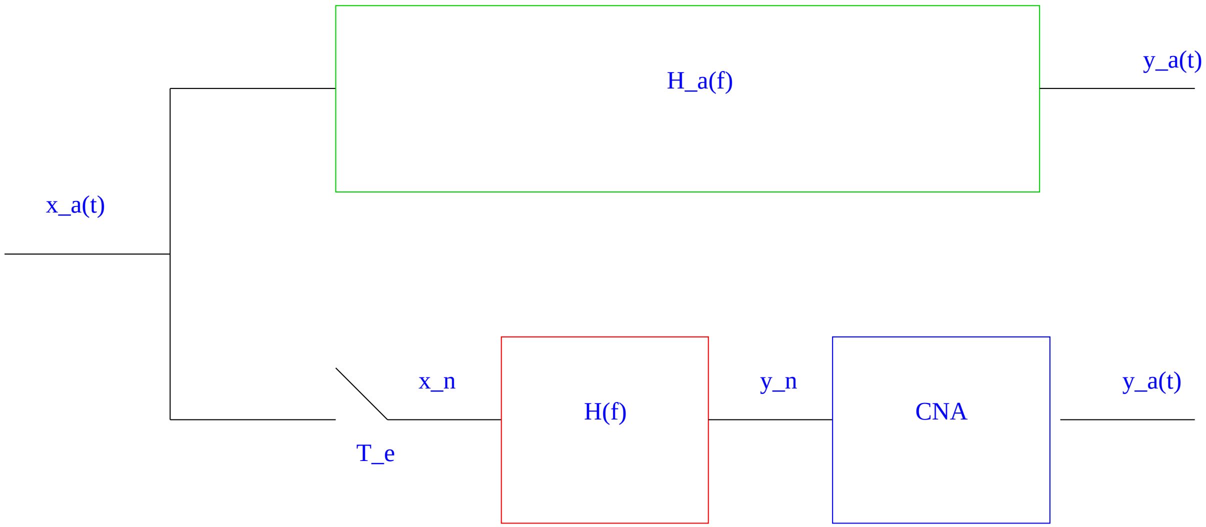
Pas de problème pour les filtres RIF, la question se pose pour les filtres RII.

- Stabilité ssi $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| < \infty$
- Si le filtre est récursif, et si $A(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}$, stabilité ssi

$$A(z) \neq 0 \text{ si } |z| > 1$$

Exemple d'application du filtrage numérique I.

Implantation numérique d'un filtrage analogique.



Exemple d'application du filtrage numérique II.

Difficile,cher, et peu flexible de mettre en oeuvre un filtre analogique $H_a(f)$

Le remplacer par :

- Echantillonnage à une fréquence suffisante, puis quantification de l'entrée
- Filtre numérique tel que $H(f) = H_a(f F_e)$
- Conversion numérique / analogique de la sortie