

## Modulations linéaires.

### Les symboles I

Suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  tels que :

- $a_n = a_n^1 + ia_n^2$ ,
- $a$  suite i.i.d. telle que  $E(a_n) = 0$ ,  $E|a_n|^2 = 1$

## Les symboles II

### Exemples.

- Constellation BPSK :  $a_n = \pm 1$
- Constellation QPSK :  $a_n \in \{1, i, -1, -i\}$
- Constellation MPSK :  $a_n \in \{e^{\frac{2ik\pi}{M}}, k = 0, \dots, M - 1\}$
- Constellation QAM4 :  $a_n \in \{\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 + \pm i)\}$
- Constellation QAM16, QAM64, ...

### La mise en forme

Génération du signal  $x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT)$

$g(t)$  filtre de mise en forme, vérifie

- Bande passante de  $g(t) = [-B, B]$ , implique que la bande passante de  $x(t)$  est  $[-B, B]$
- $\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 dt = 1$

Si les  $a_n$  sont complexes,  $x(t) = x_1(t) + ix_2(t)$  : génération de deux signaux réels portant les parties réelles et imaginaires de  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

## La modulation

Le signal modulé  $x_r(t)$

$$\begin{aligned}x_r(t) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT) e^{2i\pi f_0 t}\right) \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^1 g(t - nT)\right) \cos(2\pi f_0 t) - \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^2 g(t - nT)\right) \sin(2\pi f_0 t)\end{aligned}$$

La suite  $a^1$  est portée par  $\cos(2\pi f_0 t)$  et  $a^2$  par  $\sin(2\pi f_0 t)$ .

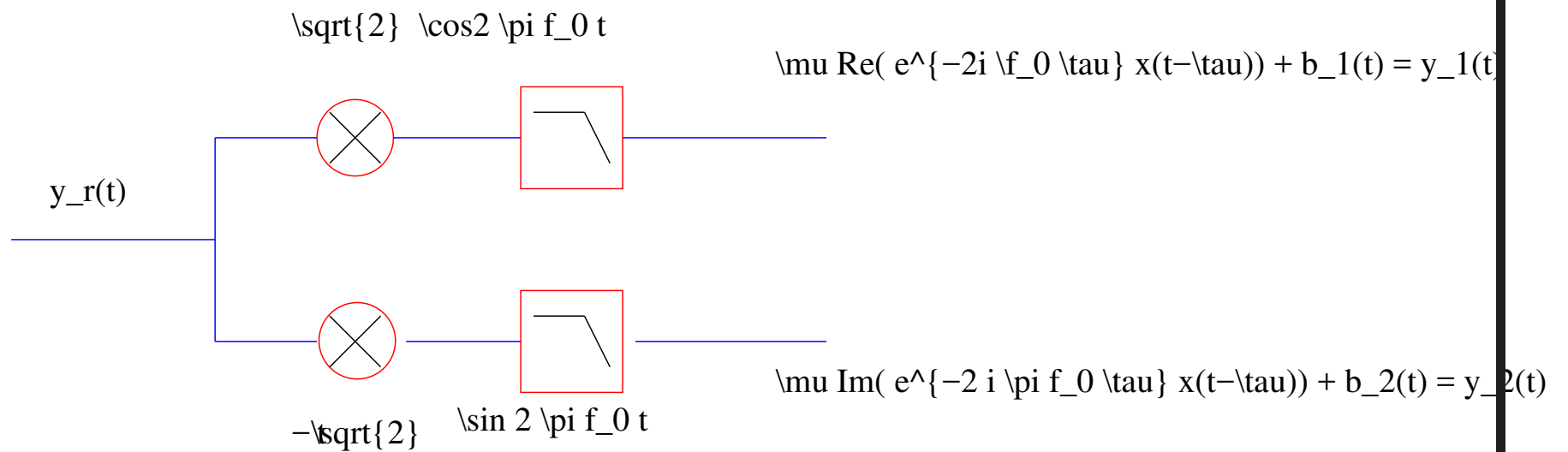
La bande passante de  $x_r(t)$  est  $[f_0 - B, f_0 + B]$

Le signal reçu.

$$y_r(t) = \sqrt{2}\mu x_r(t - \tau) + b_r(t) \text{ avec}$$

- $\tau$  retard entre l'émetteur et le récepteur
- $b_r(t)$  bruit blanc dans la bande du signal  $x_r(t)$ , densité spectrale  $\frac{N_0}{2}$
- $\mu^2$  puissance reçue

### La démodulation



Le modèle en bande de base équivalent.

$y(t) = y_1(t) + iy_2(t)$  enveloppe complexe de  $y_r(t)$

$$y(t) = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} x(t - \tau) + b(t)$$

$b(t) = b_1(t) + ib_2(t)$  avec :

$b_1$  et  $b_2$  signaux gaussiens indépendants, blancs dans la bande de  $x(t)$ , de densité spectrales  $\frac{N_0}{2}$ .

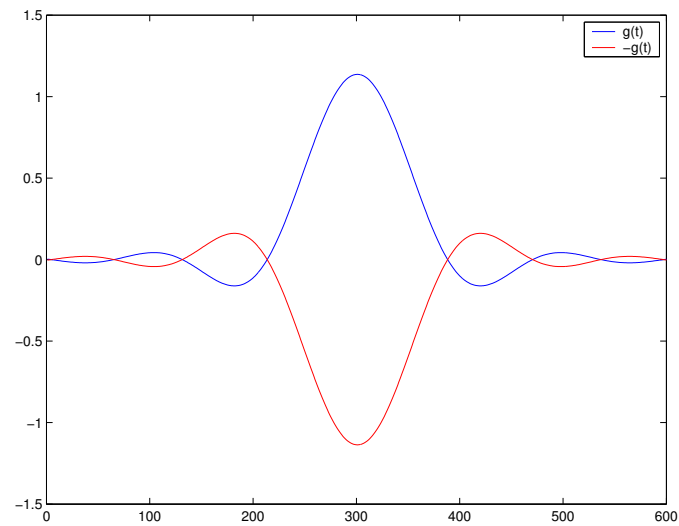
$b(t) = b_1(t) + ib_2(t)$  blanc dans la bande de  $x(t)$ , de densité spectrale  $N_0$ .



## Réception : le filtrage adapté, I

Un cas simple : un seul symbole  $a_0$  transmis

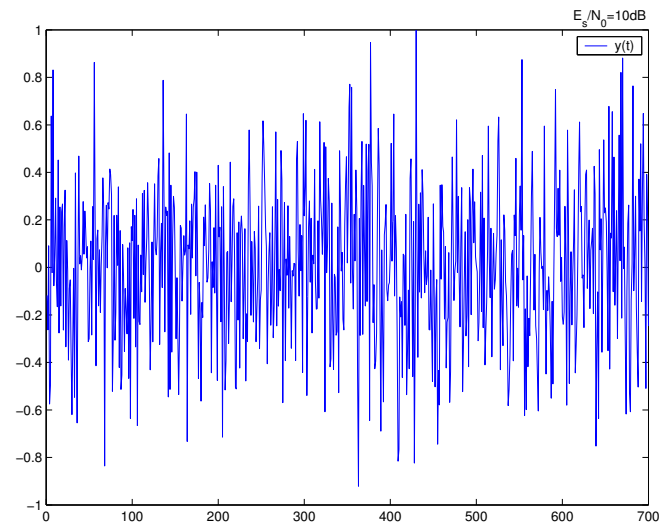
Signal transmis.



## Réception : le filtrage adapté, II

Le signal reçu.

$$y(t) = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} a_0 g(t - \tau) + b(t)$$



Réception : le filtrage adapté, III

Question posée : comment extraire "intelligemment" la valeur de  $a_0$  à partir de l'observation du signal  $y(t)$  ?

## Réception : le filtrage adapté, IV

Le détecteur minimisant la probabilité d'erreur.

Calcul de  $y = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)g(t - \tau)dt$

$$y = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} a_0 + b$$

$b = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} b(t)g(t - \tau)dt = b_1 + ib_2$ ,  $b_1, b_2$  gaussiennes indépendantes de variance  $\sigma^2/2$  avec  $\sigma^2 = \frac{N_0}{T}$ .

Prendre une décision au vu de  $y$  :

**Exemples :**

- Si  $a_0 = \pm 1$ ,  $\hat{a}_0 = \text{Signe}(\text{Re}(ye^{2i\pi f_0 \tau}))$
- Si  $a_0 \in \{e^{\frac{2i\pi k}{M}}, k = 0, \dots, M\}$ , voir selon l'argument de  $ye^{2i\pi f_0 \tau}$
- Si  $a_0 \in \{\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 + \pm i)\}$ ,  $\hat{a}_0^1 = \text{Signe}(\text{Re}(ye^{2i\pi f_0 \tau}))$ ,  $\hat{a}_0^2 = \text{Signe}(\text{Im}(ye^{2i\pi f_0 \tau}))$

## Réception : le filtrage adapté, $V$

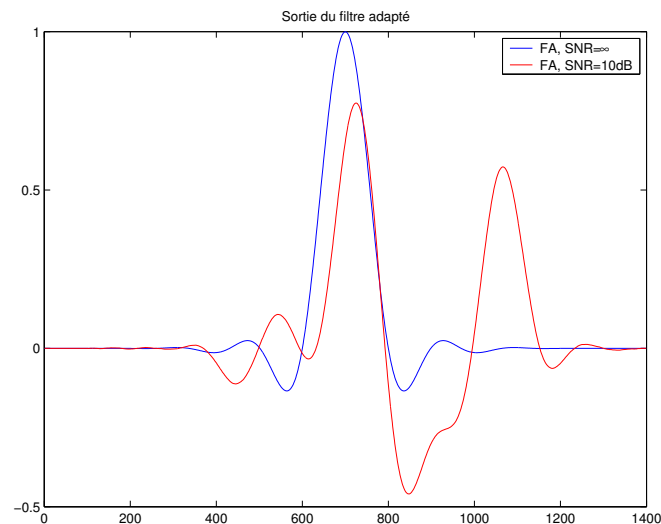
Interprétation en terme de filtrage.

Le filtre adapté :  $h(t) = \frac{1}{T} g(-t)$

Sortie du filtre adapté :

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(s)h(t - s)ds$$

Variable de décision  $y$  = sortie du filtre adapté au bon instant.



## Réception : le filtrage adapté, VI

Le cas général, une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est transmise.

- Pour détecter  $a_0$  :  $y_0 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)g(t - \tau)dt =$  sortie du filtre adapté à  $t = \tau$ .
- Pour détecter  $a_1$  :  $y_1 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)g(t - T - \tau)dt =$  sortie du filtre adapté à  $t = T + \tau$ .
- Pour détecter  $a_n$  :  $y_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)g(t - nT - \tau)dt =$  sortie du filtre adapté à  $t = nT + \tau$ .

Condition de Nyquist:  $\int_{-\infty}^{\infty} g(t + kT)g(t)dt = 0$  si  $k \neq 0$

Expression de  $y_n$ .

$$y_n = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} \sum_m \frac{1}{T} a_m \int_{\mathbb{R}} g(t - mt - \tau)g(t - nT - \tau)dt + \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} b(t)g(t - nT - \tau)dt$$

$$y_n = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} a_n + b_n$$

$$\text{Rapport signal sur bruit: } \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{\mu^2 T}{N_0} = \frac{E_s}{N_0}$$

## Réception : le filtrage adapté, VIII

Interprétation fréquentielle de la condition de Nyquist.

$$r(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \tau)g(t)dt$$

Condition de Nyquist :  $r(kT) = \delta(k)$ .

Transformée de Fourier de  $r(\tau)$  :  $\frac{1}{T}|G(f)|^2$ .

$$\text{Poisson : } \sum_{n \in \mathbb{Z}} r(nT)e^{-2i\pi n f T} = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |G(f - k/T)|^2 = 1$$

La bande passante de  $g(t)$  contient  $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$ .

Bande passante de  $x(t)$  contient  $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$ .

Bande passante supérieure au débit symbole.

Filtres de mise en forme vérifiant la condition de Nyquist.

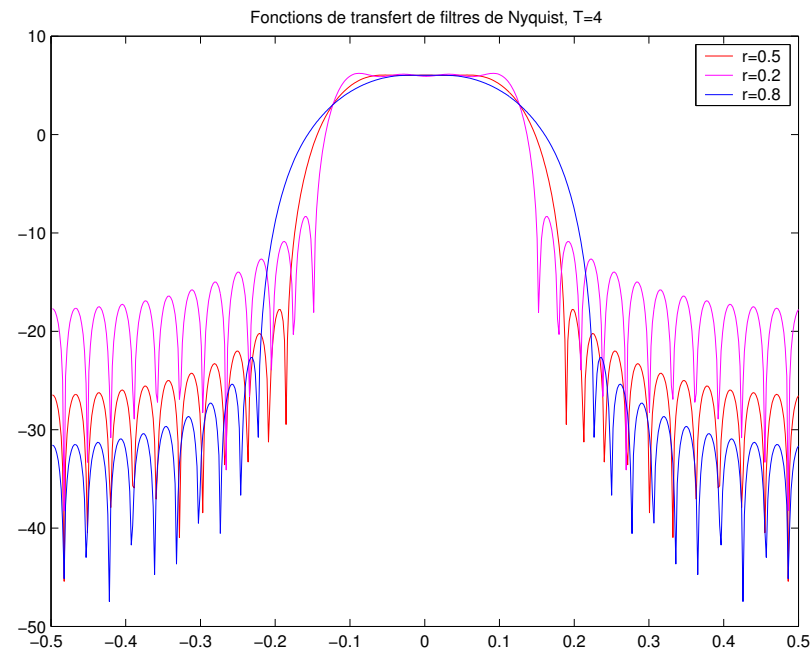
- $g(t) = 1$  si  $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$
- $g(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\pi t}$
- Plus généralement, filtres de demi-Nyquist.



## Filtres de Nyquist.

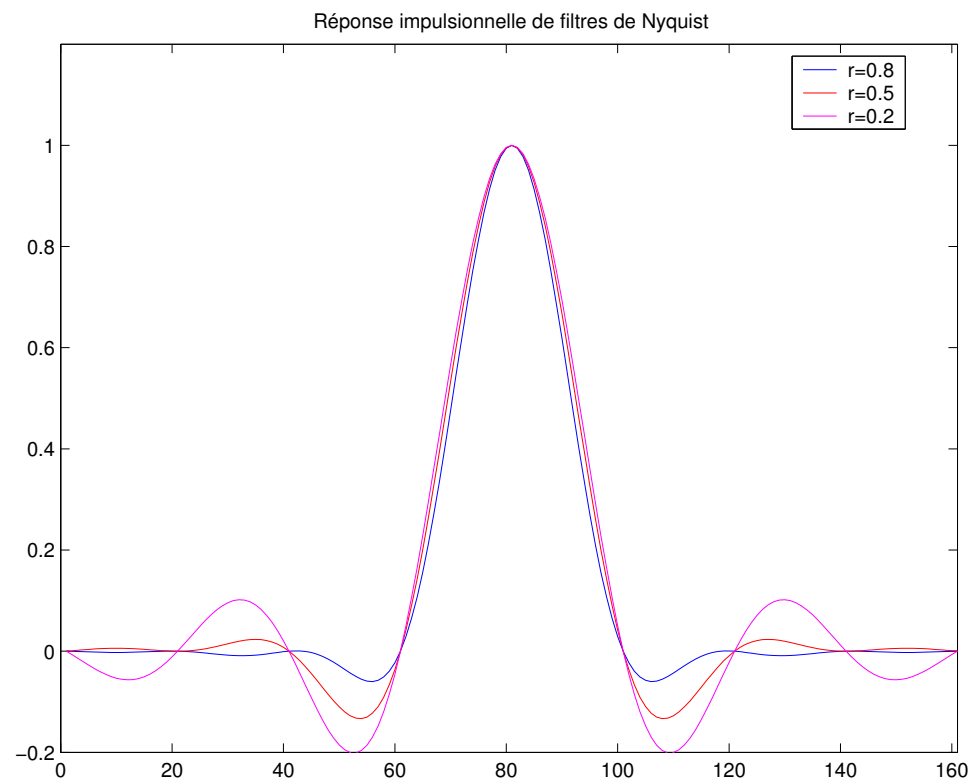
Filtres de mise en forme particuliers  $h(t)$  vérifiant  $h(kT) = 0$  si  $k \neq 0$

Dépendent d'un facteur  $0 < r < 1$  caractérisé par le fait que bande passante de  $h(t) = [-\frac{1+r}{2T}, \frac{1+r}{2T}]$ .



Filtres de Nyquist.

Réponses impulsionnelles pour  $r = 0.8, 0.5, 0.2$

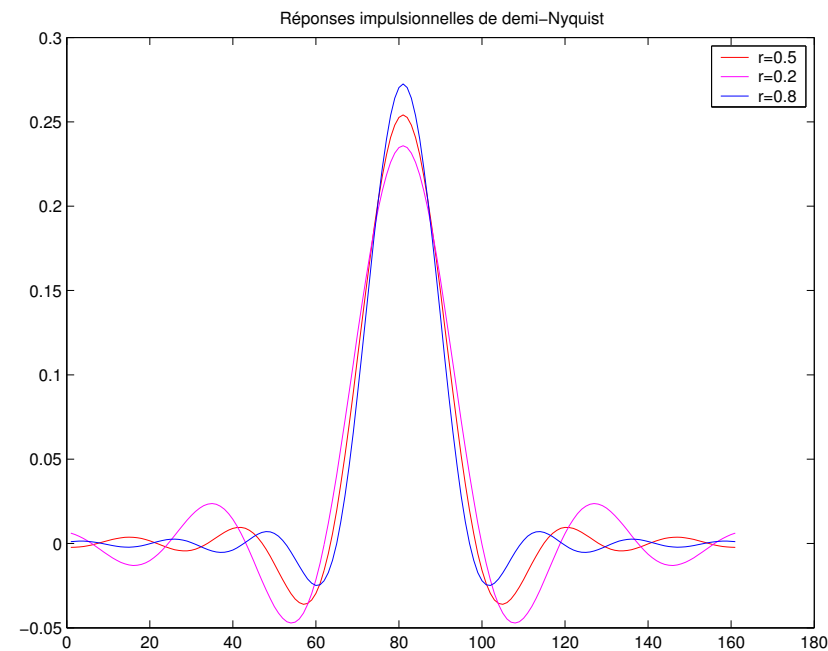


## Filtres de demi-Nyquist

Filtres de mise en forme  $g(t)$  tels que  $g(t) * g(-t) = \text{filtre de Nyquist}$

Equivalent à  $|G(f)|^2 = H(f)$ .

Réponses impulsionnelles pour  $r = 0.8, 0.5, 0.2$

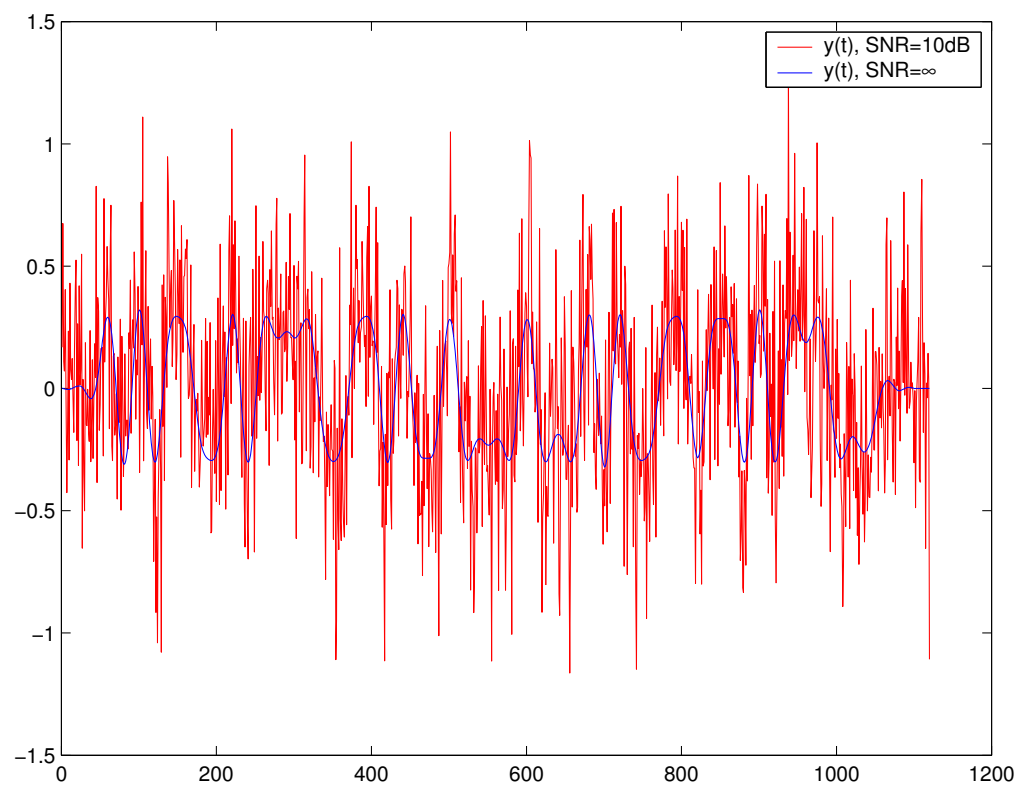


## Illustrations.

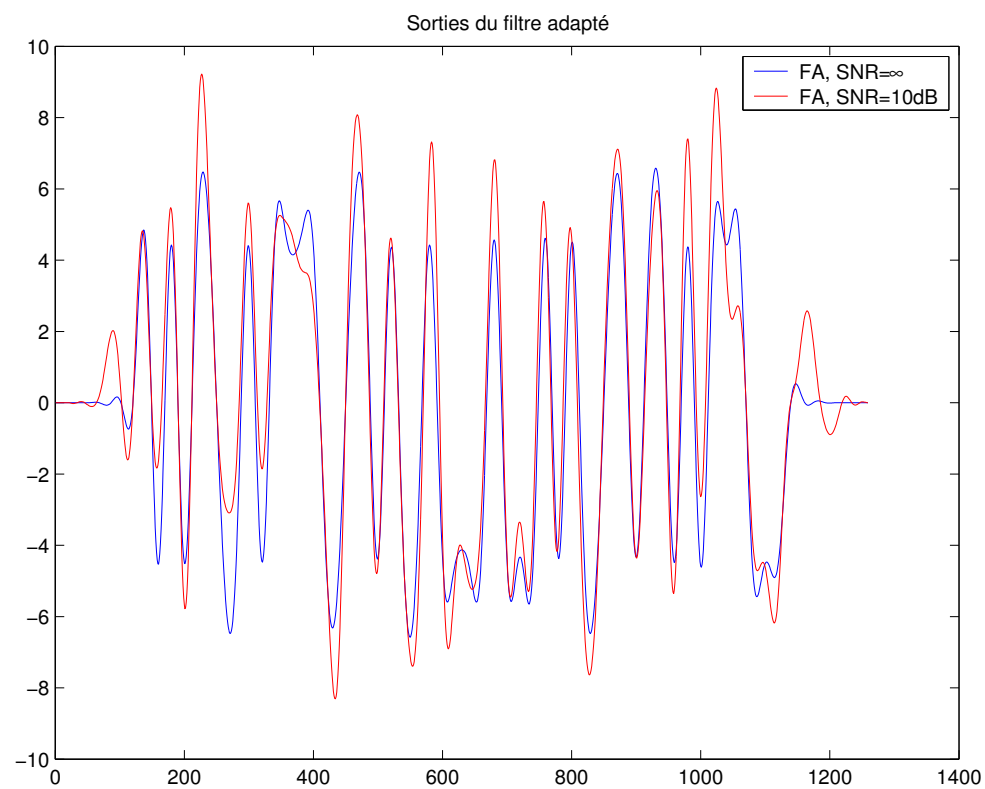
### Contexte de la simulation :

- suite de symboles  $\pm 1$
- période symbole  $T = 20$
- période d'échantillonnage  $T_e = 1$
- filtre de mise en forme : demi-Nyquist de roll-off 0.5
- bruit blanc gaussien dans la bande  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- $\frac{E_s}{N_0} = 10\text{dB}$

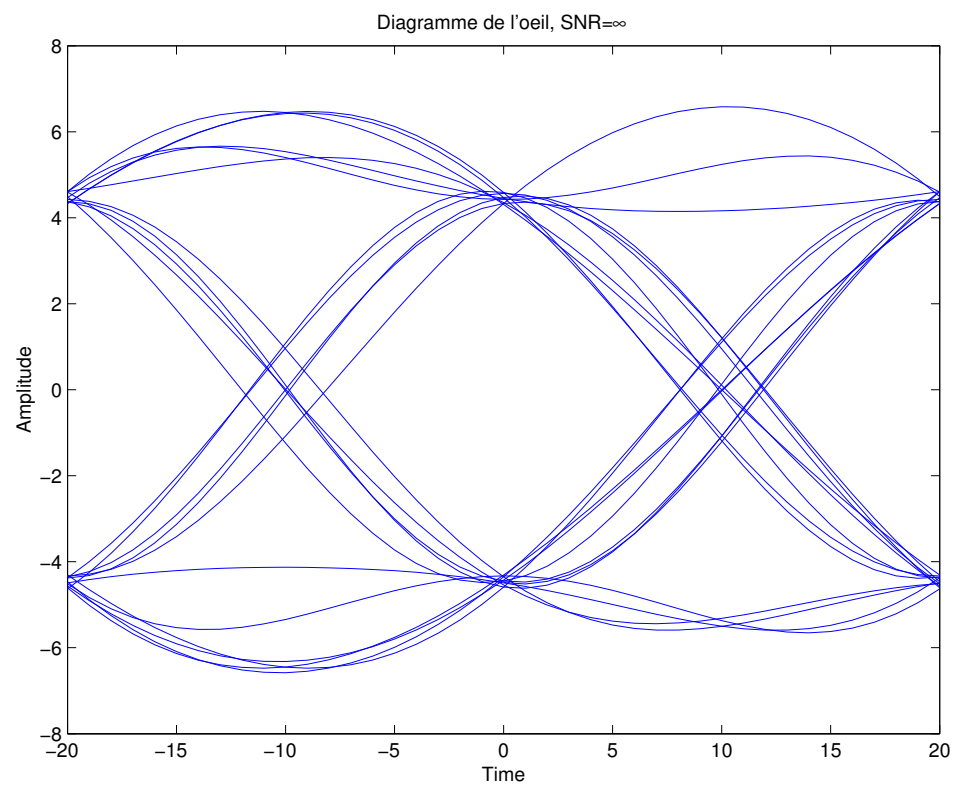
Les signaux non bruité et bruité.



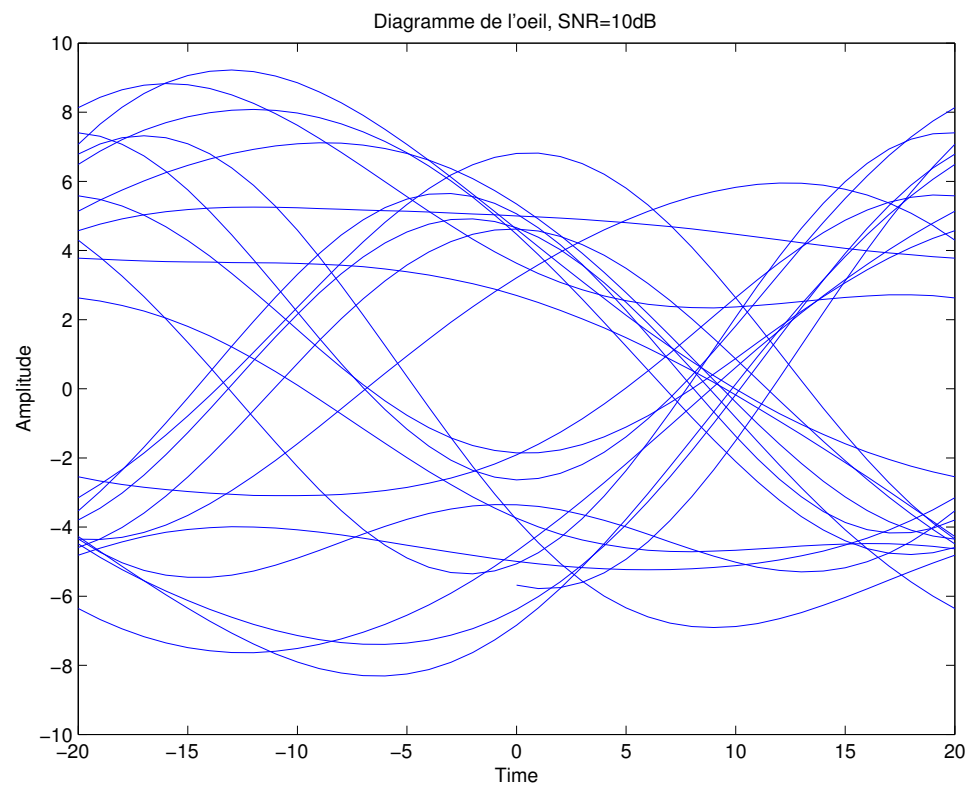
*La sortie du filtre adapté, cas non bruité et bruité.*



Le diagramme de l'oeil, cas non bruité.



Le diagramme de l'oeil, cas bruité.





### Quelques évaluations de performances I.

Notion d'énergie par bit.

$$a_n = \pm 1 : 1 \text{ bit} = 1 \text{ symbole}, E_b = E_s$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i) : 2 \text{ bits} = 1 \text{ symbole}, E_b = \frac{E_s}{2}$$

$$a_n \text{ constellation à } 2^M \text{ valeurs possibles} : M \text{ bits} = 1 \text{ symbole}, E_b = \frac{E_s}{M}$$

Evaluer les performances en fonction de  $\frac{E_b}{N_0}$

## Quelques évaluations de performances II.

$$\text{BPSK : } a_n = \pm 1, E_s = E_b, \mu = \sqrt{E_b/T}$$

$$\text{Après filtrage adapté, } y_n = \mu e^{-2i\pi f_0\tau} a_n + b_n$$

$$b_n = b_{1,n} + ib_{2,n}, \text{ avec } b_1, b_2 \text{ blancs gaussiens indépendants de variance } \frac{N_0}{2T}.$$

$$z_{1,n} = \text{Re}(y_n e^{2i\pi f_0\tau}) = \mu a_n + b_{1,n}.$$

$$\text{Evènement d'erreur : } ((z_{1,n} < 0) \cap (a_n = 1)) \cup ((z_{1,n} > 0) \cap (a_n = -1))$$

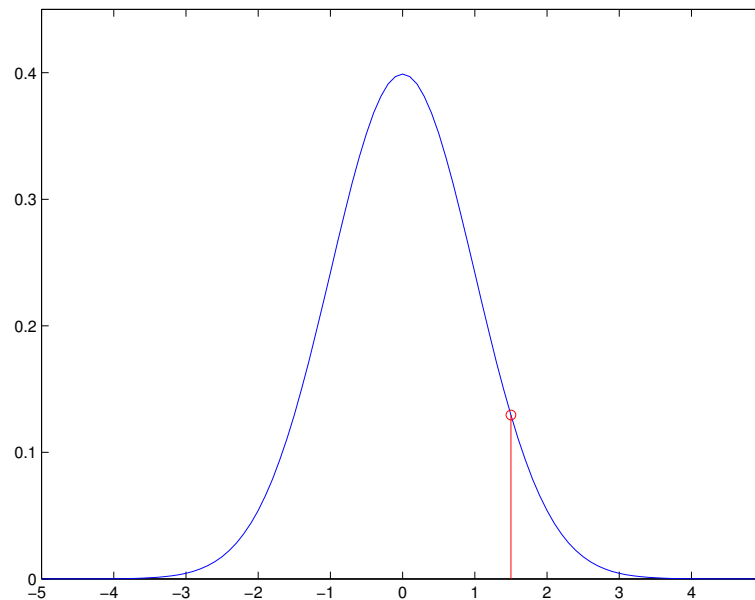
$$\text{Autre expression : } ((b_{1,n} < -\mu) \cap (a_n = 1)) \cup (b_{1,n} > \mu) \cap (a_n = -1))$$

$$\text{Proba d'erreur : } P(b_{1,n} > \mu) = P(N(0, 1) > \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right).$$

Quelques évaluations de performances III.

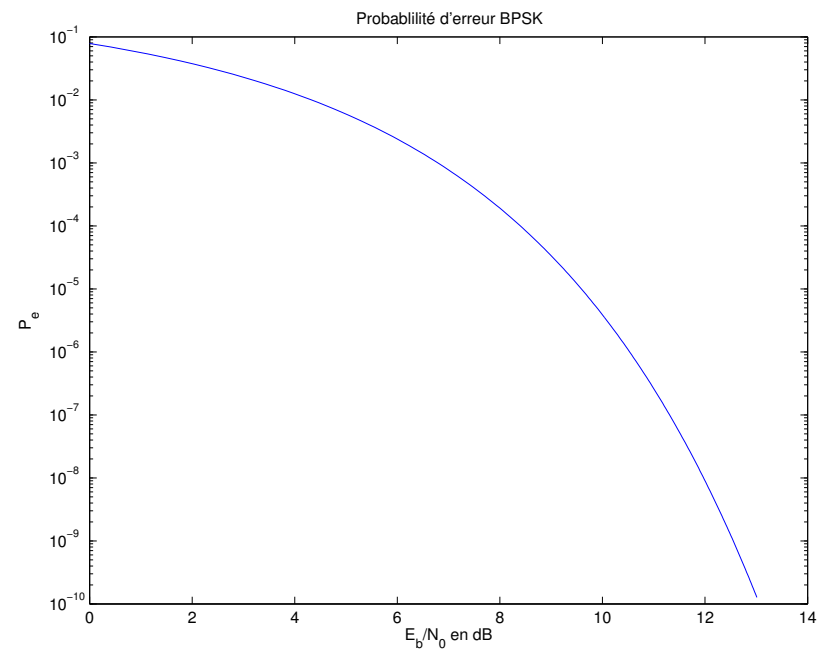
La fonction  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$ .

$Q(x)$  = aire comprise en la courbe bleue et le segment rouge.



Quelques évaluations de performance IV.

Graphe de  $Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$



Quelques évaluations de performances V.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i), \text{ QAM4 : } E_b = \frac{E_s}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1,n} + ia_{2,n}), a_{i,n} = \pm 1.$$

$$y_n = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} a_n + b_n \text{ donc } z_{i,n} = \mu a_{i,n} + b_{i,n}$$

$$\text{Proba d'erreur sur } a_{i,n} : Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

BPSK et QAM4 ont la même probabilité d'erreur

QAM4 est plus favorable car permet de transporter deux fois bits que BPSK dans la même bande passante.