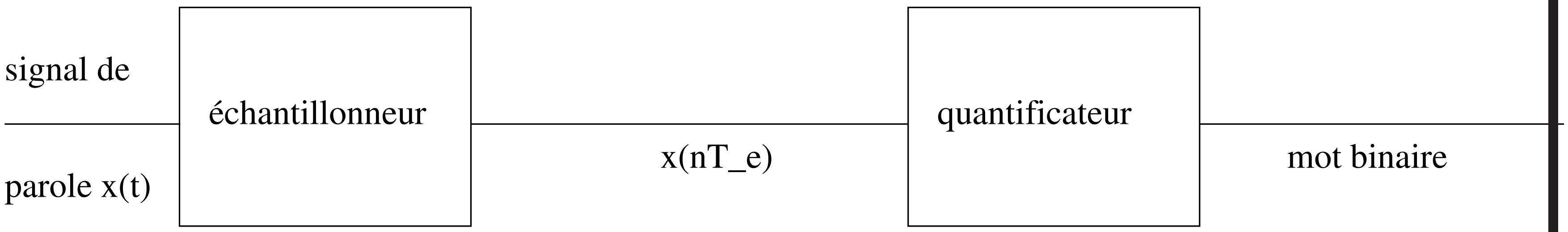
Echantillonnage et signaux à temps discret.

Motivation

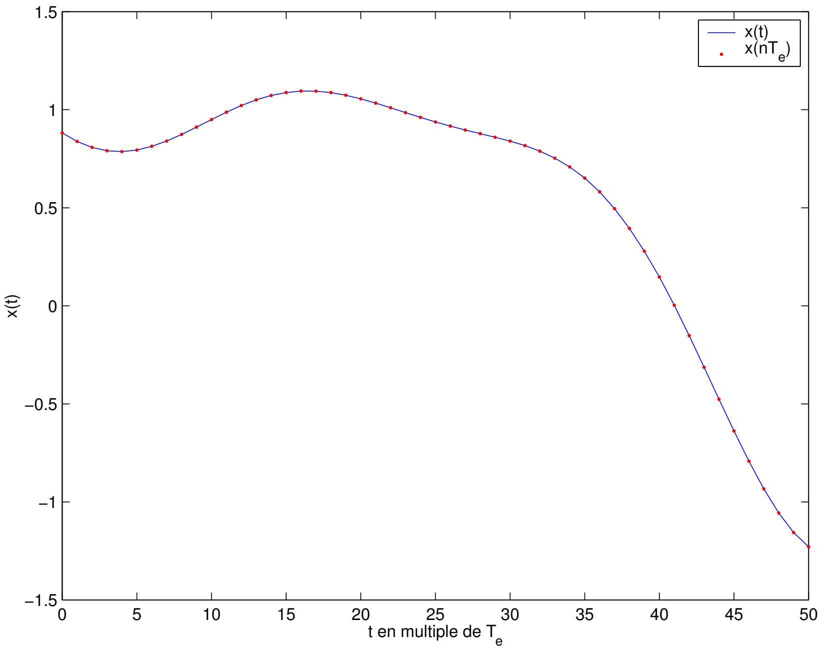


Questions.

- Comment choisir T_e ?
- Comment reconsituer le signal $x(t)$ à partir des bits qui le représentent ?

T_e période d'échantillonnage, $F_e = \frac{1}{T_e}$ fréquence d'échantillonnage.

Reformulation.



Peut-on reconstituer de façon unique la courbe bleue à partir des points rouges ?

Théorème de Shannon.

Soit $x(t)$ un signal de bande passante $[-B, B]$. Alors, si $T_e < \frac{1}{2B} \Longleftrightarrow B < \frac{F_e}{2}$, la fonction $x(t)$ est définie de façon unique par la suite $(x(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$. De plus,

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \frac{\sin(\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e})}{\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e}}$$

$x(t)$ est la seule courbe suffisemment douce passant par les points $(x(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$.

Preuve du théorème de Shannon I.

Basée sur la formule sommatoire de Poisson. Formule fondamentale qui possède son intérêt propre.

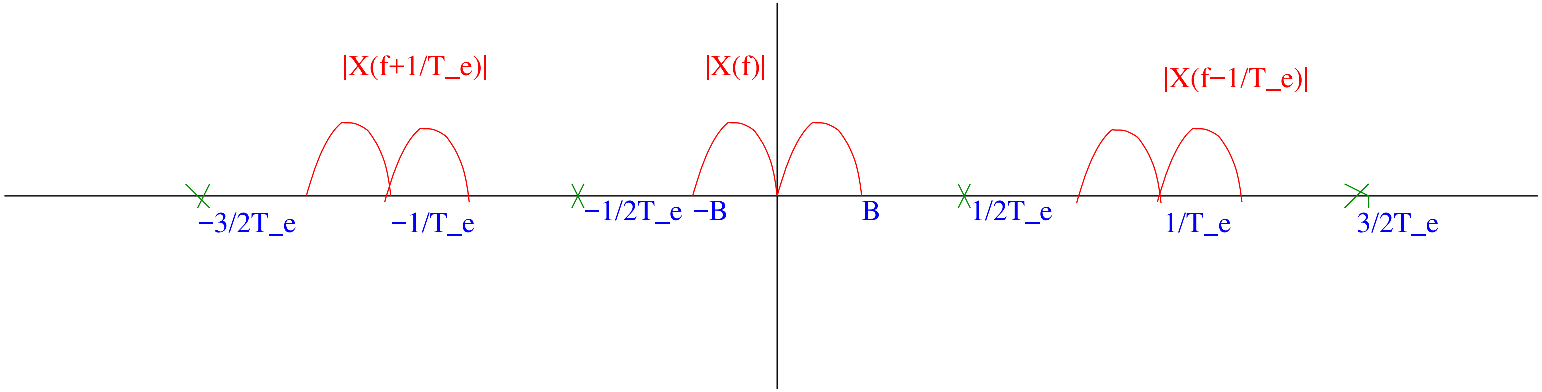
Soit $x(t)$ une fonction et $X(f)$ sa TF. Alors:

$$T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) e^{-2i\pi n f T_e} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - \frac{k}{T_e})$$

Preuve du théorème de Shannon II.

Soit $Y(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - \frac{k}{T_e}) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) e^{-2i\pi n f T_e}$

Si $T_e < \frac{1}{2B} \Longleftrightarrow B < \frac{1}{2T_e}$.



$X(f) = Y(f)$ sur $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$.

$x(t) = \int_{-B}^{B} X(f) e^{2i\pi f t} df = \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} Y(f) e^{2i\pi f t} df.$

On remplace $Y(f)$ par son expression $\Rightarrow$ formule d'interpolation de Shannon.

Application aux convertisseurs numériques analogiques I.

Comment générer concrètement le signal $x(t)$ à partir de la suite $(x(nT_e))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Soit $h(t)$ une fonction telle que

$$\begin{aligned} H(f) &= 1 \text{ si } f \in [-B, B] \\ &= 0 \text{ si } f \notin [-\tfrac{1}{2T_e}, \tfrac{1}{2T_e}] \end{aligned}$$

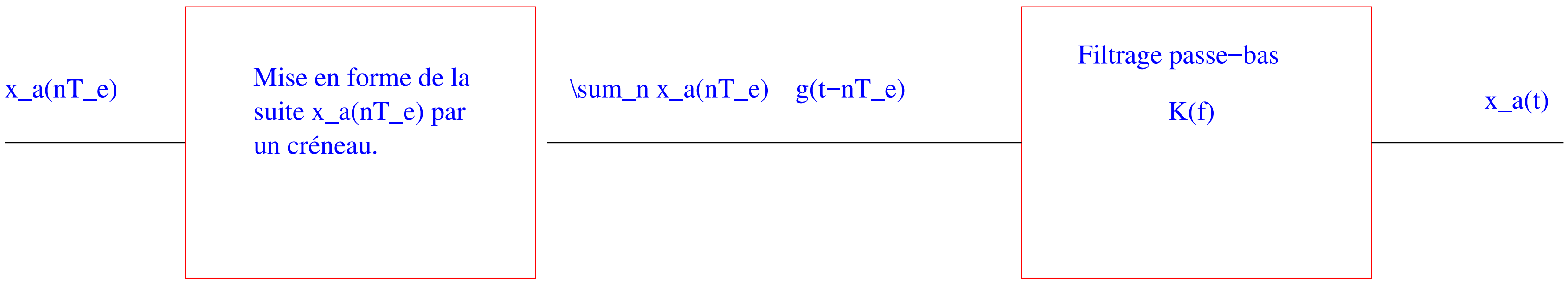
Alors :

$$x(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)h(t - nT_e)$$

Si $h(t) = \frac{sin(\pi t/T)}{\pi t}$, on retrouve la formule de Shannon.

Application aux convertisseurs numériques analogiques II.

Principe général.



K(f) G(f) = 1 sur [−B, B]

K(f) = 0 hors de [−1/2T_e,1/2T_e]

Signaux à temps discrets. Généralités

Signal à temps discret = suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Exemple typique : $x_n = x_a(nT_e)$ où $x_a(t)$ est un signal à temps continu et T_e sa période d'échantillonnage.

Signaux à temps discrets. Transformée de Fourier, I

$X(f)$ la transformée de Fourier de $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la fonction définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par:

$$X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n f}$$

La variable f est appelée fréquence normalisée.

Signaux à temps discrets. Transformée de Fourier, II

Justification de l'expression fréquence normalisée.

$x_n = x_a(nT_e)$ où $x_a(t)$ est de bande passante $[-B, B]$ et $B < \frac{1}{2T_e}$.

Grâce à la formule de Poisson :

$$X_a(\nu) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n \nu T_e} \text{ si } \nu \in [-\tfrac{1}{2T_e}, \tfrac{1}{2T_e}]$$

On pose alors $f = \nu T_e = \frac{\nu}{F_e}$ qui appartient à $[-1/2, 1/2]$:

$$X(f) = F_e X_a(f F_e) \text{ si } f \in [-1/2, 1/2]$$

Aux renormalisations près, TF du signal à temps discret $(x_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$ = TF du signal à temps continu $x_a(t)$.

Quelques propriétés de la TF.

Philosophie : mêmes types de propriétés que la TF des signaux à temps continu.

$X(f) =$ TF de $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

- $x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{2i\pi n f} df$ pour tout n
- TF de $(x_{n-n_0})_{n\in\mathbb{Z}} = e^{-2i\pi n_0 f} X(f)$
- TF de $e^{2i\pi n f_0} = \delta(f - f_0)$
- Si x est réel, $X(-f) = X(f)^*$
- Si x est réel, $x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{2i\pi n f} df = \int_0^{1/2} C(f) \cos(2\pi n f + \phi(f)) df$ avec $X(f) = \frac{C(f)}{2} e^{i\phi(f)}$.
- $X^{'}(f) = -2i\pi \sum_n n x_n e^{-2i\pi n f} = -2i\pi$ TF signal $(n x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

Filtrage des signaux à temps discret I

Produit de convolution de signaux à temps discret x et y : $z = x * y$:

$$z_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k}$$

Mêmes propriétés que dans le cas des signaux à temps continus: en particulier;

$$\text{TF de } (x * y)_n = X(f)Y(f)$$

On a aussi

$$\text{TF de } x_n y_n = (X * Y)(f)$$

Filtrage des signaux à temps discret II

Filtre = dispositif tel que :

$y_n = (h * x)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$

x est l'entrée du filtre, y la sortie du filtre, et h est sa réponse impulsionnelle.

- Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) si seuls un nombre fini de h_k sont non nuls
- Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) dans le cas contraire

Filtres le plus souvent causaux, $h_k = 0, k < 0$, $y_n = (h * x)_n = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k x_{n-k}$

Filtrage des signaux à temps discret III

$H(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k e^{-2i\pi k f}$ est la fonction de transfert.

Relation d'entrée / sortie dans le domaine fréquentiel :

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Même utilisation que les filtres à temps continu : couper des bandes de fréquences.

Filtrage des signaux causaux.

Filtre causal, i.e. la réponse impulsionnelle h est un signal causal, i.e. $h_n = 0$ si $n < 0$.

On met à l'entrée du filtre un signal causal u, et on appelle y le signal de sortie qui, par définition est le produit de convolution de u avec h. y est causal et est donné par

$$y_n = (h * u)_n = \sum_{k=0}^{n} h_k u_{n-k},\ n \geq 0 \tag{1}$$

En terme de transformée de Fourier $Y(f) = H(f)U(f)$ où $H(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k e^{-2i\pi kf}$ est la fonction de transfert du filtre.

Question importante: pour calculer y_n à chaque instant n via la formule (11), il semble qu'il faille en général effectuer n opérations. Ceci n'est évidemment pas envisageable. C'est la raison pour laquelle on ne considère en pratique que des filtres pour lesquels on peut calculer y_n à chaque instant n en faisant un nombre d'opérations indépendant de n. Ces filtres sont ceux dont la fonction de transfert $H(f)$ est une fraction rationnelle de la variable $e^{-2i\pi f}$.

Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Ce sont les filtres pour lesquels tous les coefficients $(h_k)_{k \geq 0}$ au delà d'un certain entier K sont nuls: $h_k = 0$ si $k > K$.

Si $n \geq K$, l'équation (11) se met sous la forme:

$$y_n = (h * u)_n = \sum_{k=0}^{K} h_k u_{n-k}, \; n \geq 0 \tag{2}$$

Le calcul de y_n nécessite donc $(K+1)$ opérations pour tout $n \geq K$. La fonction de transfert du filtre $H(f)$ est le polynôme de la variable $e^{-2i\pi f}$ donné par $H(f) = \sum_{k=0}^{K} h_k e^{-2i\pi k f}$ qui est bien une fraction rationnelle de $e^{-2i\pi f}$.

Filtres récursifs à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Exemple simple: filtre d'ordre 1

$(u_n)_{n \geq 0}$ étant le signal causal d'entrée, on définit la sortie $(y_n)_{n \geq 0}$ comme le signal causal vérifiant pour tout instant $n \geq 0$ l'équation

$$y_n - a y_{n-1} = u_n \tag{3}$$

Comment calculer y_n pour chaque n ?

- Initialisation: pour $n = 0$, (13) donne $y_0 = u_0$ car $y_{-1} = 0$ du fait de la causalité de y.
- Pour $n = 1$, (13) donne $y_1 - a y_0 = u_1$, d'où $y_1 = a y_0 + u_1$.
- Pour $n = 2$, même chose, $y_2 = a y_1 + u_2$.
- $y_0, \ldots, y_{n-1}$ ayant été préalablement calculés, on évalue y_n par $y_n = a y_{n-1} + u_n$.
- Et on continue

A chaque instant n, le calcul de y_n nécessite donc de mettre en oeuvre 1 multiplication (celle de y_{n-1} par a) et une accumulation (ajouter u_n à ay_{n-1}). On convient souvent de considérer qu'une multiplication et une accumulation font une opération. On parle d'implémentation récursive.

En conclusion, il faut 1 opération pour calculer y_n pour chaque valeur de n.

Pourtant, nous allons voir dans le transparent suivant que la réponse impulsionnelle du filtre transformant u en y est la suite causale $h_k = a^k$ pour tout k. Dans ces conditions,

$y_n = \sum_{k=0}^{n} a^k u_{n-k}$

Si on calculait y_n directement comme cela, il faudrait à chaque instant n faire n opérations. L'implémentation récursive rend donc possible la mise en oeuvre pratique de ce filtre d'ordre 1.

Calcul de la fonction de transfert et de la réponse impulsionnelle

Comme $y_n = a y_{n-1} + u_n$ pour tout $n \geq 0$, la transformée de Fourier du signal de gauche est égale à la transformée de Fourier du terme de droite. En utilisant la propriété que la transformée de Fourier du signal retardé d'une unité y_{n-1} est égale à $e^{-2i\pi f} Y(f)$, on obtient que $Y(f) = a e^{-2i\pi f} Y(f) + U(f)$ c'est-à-dire

$$Y(f) = \frac{1}{1 - a e^{-2i\pi f}} U(f) \tag{4}$$

On en déduit que

$$H(f) = \frac{1}{1 - a e^{-2i\pi f}}$$

Pour retrouver la réponse impulsionnelle, il faut développer $H(f)$ sous la forme $H(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k e^{-2ik\pi f}$. Ici, il est clair que

$\frac{1}{1-ae^{-2i\pi f}} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{-2ik\pi f}$ si $|ae^{-2i\pi f}| < 1$, c'est-à-dire si $|a| < 1$.

Par conséquent, $h_k = a^k$ pour tout $k \geq 0$ si $|a| < 1$.

Cas général

La sortie $(y_n)_{n\geq 0}$ est définie comme la suite causale vérifiant l'équation récursive $y_n + \sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k} = \sum_{l=0}^{q} b_l u_{n-l}$ Comment calculer y_n pour tout n ?

- Initialisation $y_0 = b_0 u_0$
- $y_1, \ldots, y_{n-1}$ ayant été calculé on évalue y_n par

$$y_n = -\left(\sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k}\right) + \sum_{l=0}^{q} b_l u_{n-l}$$

- La mise en oeuvre du filtre nécessite donc $p+q+1$ opérations

Fonction de transfert

On écrit que les transformées de Fourier des signaux $(y_n + \sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k})_{n \geq 0}$ et $(\sum_{l=0}^{q} b_l u_{n-l})_{n \geq 0}$ coïncident.

On obtient donc

$$Y(f) + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-2ik\pi f} Y(f) = \sum_{l=0}^{q} b_l e^{-2il\pi f} U(f) \tag{5}$$

ce qui donne

$$Y(f) = H(f) U(f)$$

avec

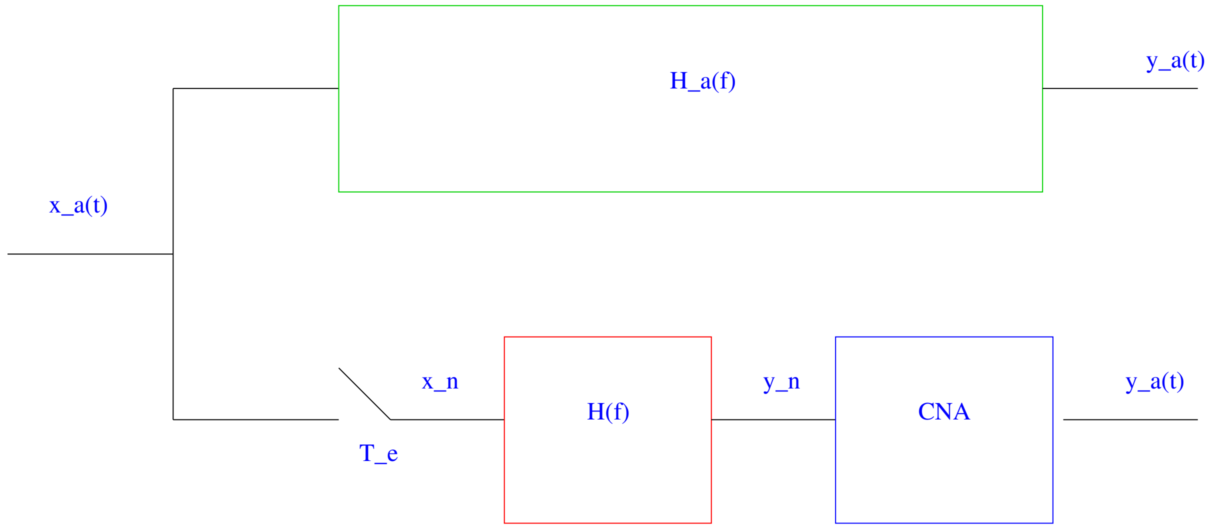
$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{q} b_l e^{-2il\pi f}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-2ik\pi f}}$$

$H(f)$ est bien une fraction rationnelle de $e^{-2i\pi f}$. En conclusion:

Les filtres que l'on implémente en pratique sont ceux dont la fonction de transfert $H(f)$ est une fraction rationnelle de $e^{-2i\pi f}$.

Exemple d'application du filtrage numérique I.

Implantation numérique d'un filtrage analogique.



Exemple d'application du filtrage numérique II.

Difficile,cher, et peu flexible de mettre en oeuvre un filtre analogique $H_a(f)$

Le remplacer par :

- Echantillonnage à une fréquence suffisante, puis quantification de l'entrée
- Filtre numérique tel que $H(f) = H_a(fF_e)$
- Conversion numérique / analogique de la sortie

Justification

$y_n = y_a(nT_e)$ équivaut à dire que $Y_a(\nu) = T_e Y(\nu T_e)$ du fait de la formule de Poisson

Il suffit donc de vérifier que si $H(f) = H_a(fF_e)$, alors $Y_a(\nu) = T_e Y(\nu T_e)$ ou de façon équivalente que $Y(f) = F_e Y_a(fF_e)$

- On a $X_a(\nu) = T_e X(\nu T_e)$ ou encore $X(f) = F_e X_a(fF_e)$.
- $Y_a(\nu) = H_a(\nu) X_a(\nu)$ et $Y(f) = H(f)X(f)$
- $H(f) = H_a(fF_e)$ implique $Y(f) = H_a(fF_e) F_e X_a(fF_e) = F_e Y_a(fF_e)$

Transformée en z des signaux causaux.

Motivation: beaucoup de signaux n'ont pas de transformée de Fourier

Exemple typique: échelon unité d'Heaviside à temps discret défini par
$\Upsilon_n = 0, n < 0, \Upsilon_n = 1, n \geq 0$

Définition

- x un signal causal, i.e. $x_n = 0, n < 0$, ou $x_n = x_n \Upsilon_n$ pour tout n
- $X(z) = \mathcal{Z}(x)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ où z est complexe
- Sauf cas pathologique, la somme définissant $X(z)$ est bien définie (convergente) si $|z^{-1}|$ est assez petit, ou si $|z|$ est assez grand.

Exemples à savoir par coeur

- $\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ si $n \neq 0$, $\mathcal{Z}(\delta)(z) = 1$
- $\mathcal{Z}(\Upsilon)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Upsilon_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$ égal à $\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ si $|z| > 1$.
- $x_n = c^n \Upsilon_n$, $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(cz^{-1}\right)^n$ égal à $\frac{1}{1-cz^{-1}} = \frac{z}{z-c}$ si $|z| > |c|$
- $x_n = n\, c^n \Upsilon_n$, $X(z) = \frac{cz}{(z-c)^2}$ voir lien transformée en z et dérivation pour une justification

Remarques

- Sur ces exemples: les transformées en z sont des fractions rationnelles de z, et c apparaît comme pôle de $X(z)$
- On peut vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty$ si et seulement si $|c| < 1$.
- Cette constatation s'avérera généralisable à tous les signaux dont les transformées en z sont des fractions rationnelles.

Propriétés de la transformée en z

- Linéarité: $\mathcal{Z}(\alpha\, x + \beta\, y)(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$
- Influence d'un retard entier $n_0 \geq 0$ sur le signal, $y_n = x_{n-n_0}$, qui remarquons-le, est nul si $n < n_0$: $Y(z) = z^{-n_0}\, X(z)$, la multiplication par z^{-1} équivaut à un retard d'une unité de temps.
- Transformée en z et dérivation, $-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, x_n\, z^{-n}$
- Transformée en z et produit de convolution: si x et u sont 2 signaux causaux, $y = x * u$ est un signal causal, et pour $n \geq 0$, on a

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k\ u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k\ x_{n-k},\ Y(z) = X(z)\, U(z) \tag{6}$$

- $\lim_{z \to +\infty} X(z) = x_0$
- Lien transformée de Fourier / transformée de Laplace: si $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty$, $X(f) = \sum_{n=0} x_n e^{-2i\pi n f} = ((\mathcal{Z}(x)(z))_{z=e^{2i\pi f}}$. Noter l'abus de notation $X(f) = X(e^{2i\pi f})$ car on a noté la transformée de Fourier et la transformée en z de la même façon.

Propriétés de la transformée en z, suite

- Retrouver le signal à partir de la transformée en z si $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ est une fraction rationnelle de z
- Remarque: x causal implique $\deg(P) \leq \deg(Q)$ car sinon, $X(z)$ tendrait vers l'infini quand $z \to +\infty$, ce qui serait contradictoire avec $\lim_{z \to +\infty} X(z) = x_0$
- Faire une décomposition en éléments simples de $X(z)$, voir les calculs faits en cours
- Propriété importante: si les (c_i) sont les pôles de $X(z)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty \Longleftrightarrow |c_i| < 1, \text{ pour tout } i \tag{7}$$

Rappels sur la décomposition en éléments simples.

$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ fraction rationnelle avec $\deg(P) \leq \deg(Q)$

Pôles de $X(z)$ = zéros de $Q(z)$

Si c est un pôle de $X(z)$:

- c est qualifié de pôle simple, ou de pôle d'ordre de multiplicité 1, si $Q(z) = (z - c)Q_1(z)$ avec $Q_1(c) \neq 0$
- c est qualifié de pôle d'ordre r, ou de pôle d'ordre de multiplicité r, si $Q(z) = (z - c)^r Q_r(z)$ avec $Q_r(c) \neq 0$

Rappels sur la décomposition en éléments simples.

Cas où $X(z)$ n'a que des pôles simples

On suppose que les pôles de $X(z)$ sont simples. Soient $c_1, \ldots, c_n$ ces pôles

Proposition: Il existe des constantes $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $X(z)$ se décompose sous la forme

$$X(z) = \mu + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z - c_k}, \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \tag{8}$$

$\mu \in \mathbb{R}$ et pour chaque k, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ si $c_k \in \mathbb{R}$ et $\lambda_k \in \mathbb{C}$ si $c_k \in \mathbb{C}$.

Calcul des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ expliqué dans le cadre d'exemples à suivre pour éviter des formules un peu lourdes.

Pour calculer μ, on dit que (8) étant vérifié pour tout z, la limite quand $z \to +\infty$ de $X(z)$ est égale à la limite du terme de droite de (8).

$\mu = \lim_{z \to +\infty} X(z) = x_0$ car pour chaque k, $\frac{\lambda_k}{z - c_k} \to 0$ si $z \to +\infty$

Rappels sur la décomposition en éléments simples.

Cas où $X(z)$ peut avoir un ou des pôles multiples

Supposons qu'un pôle c_k soit d'ordre 2

Le terme dû à c_k dans la décomposition en élément simple est du type:

$$\frac{\lambda_{k,1}}{z-c_k} + \frac{\lambda_{k,2}}{(z-c_k)^2}$$

Supposons qu'un pôle c_k soit d'ordre 3

Le terme dû à c_k dans la décomposition en élément simple est du type:

$$\frac{\lambda_{k,1}}{z-c_k} + \frac{\lambda_{k,2}}{(z-c_k)^2} + \frac{\lambda_{k,3}}{(z-c_k)^3}$$

Supposons qu'un pôle c_k soit d'ordre r

Le terme dû à c_k dans la décomposition en élément simple est du type:

$$\frac{\lambda_{k,1}}{z-c_k} + \frac{\lambda_{k,2}}{(z-c_k)^2} + \frac{\lambda_{k,3}}{(z-c_k)^3} + \ldots + \frac{\lambda_{k,r}}{(z-c_k)^r}$$

Exemples

Cas où $X(z)$ n'a que des pôles simples

$$X(z) = \frac{z+b}{(z-c_1)(z-c_2)} = \mu + \frac{\lambda_1}{z-c_1} + \frac{\lambda_2}{z-c_2} \tag{9}$$

$$\mu = \lim_{z\to+\infty} X(z) = 0,\ X(z) = \frac{\lambda_1}{z-c_1} + \frac{\lambda_2}{z-c_2}$$

Calcul de λ_1

- On multiplie (9) à gauche et à droite par $(z-c_1)$
- $(z-c_1)X(z) = \frac{z+b}{z-c_2} = \lambda_1 + (z-c_1)\,\frac{\lambda_2}{z-c_2}$
- On prend $z = c_1$ dans cette dernière égalité
- $\lambda_1 = \frac{b+c_1}{c_1-c_2} = [(z-c_1)X(z)]_{z=c_1}$

On fait de même pour λ_2 : $\lambda_2 = [(z-c_2)X(z)]_{z=c_2} = \frac{b+c_2}{c_2-c_1}$

Calcul du signal x

Pour $i = 1, 2$, calcul du signal dont $X_i(z) = \frac{\lambda_i}{z-c_i}$ est la transformée en z

- $\frac{z}{z-c_i} = Y_i(z) = \mathcal{Z}(y_i)(z)$ avec $y_{i,n} = c_i^n \, \Upsilon_n$
- $\frac{1}{z-c_i} = z^{-1} \, Y_i(z)$
- Multiplication par z^{-1} de la transformée en z, équivaut à un retard d'une unité de temps
- $\frac{1}{z-c_i} = \mathcal{Z}(x_i)(z)$ avec $x_{i,n} \; = y_{i,n-1}$,
- $x_{i,n} = c_i^{n-1} \Upsilon_{n-1}$

$X(z) = \lambda_1 X_1(z) + \lambda_2 X_2(z)$ implique $x_n = \lambda_1 \, x_{1,n} + \lambda_2 \, x_{2,n}$

- $x_n = \lambda_1 \, c_1^{n-1} \Upsilon_{n-1} + \lambda_2 \, c_2^{n-1} \Upsilon_{n-1}$
- $x_0 = 0$ et $x_n = \lambda_1 \, c_1^{n-1} + \lambda_2 \, c_2^{n-1}$ si $n \geq 1$

Bien vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty$ a lieu si et seulement si $|c_i| < 1$ pour $i = 1, 2$, voir propriété (7)

Exemples

Cas où $X(z)$ a un pôle double

$X(z) = \frac{z+b}{(z-c_1)^2(z-c_2)}$, $\mu = x_0 = 0$

Dans ce cas, la décomposition en éléments simples se met sous la forme

$$X(z) = \frac{z+b}{(z-c_1)^2(z-c_2)} = \frac{\lambda_{1,1}}{z-c_1} + \frac{\lambda_{1,2}}{(z-c_1)^2} + \frac{\lambda_2}{z-c_2} \tag{10}$$

avec:

- $\lambda_2 = [(z-c_2)X(z)]_{z=c_2} = \left[\frac{z+b}{(z-c_1)}\right]_{z=c_2} = \frac{c_2+b}{c_2-c_1}$
- $\lambda_{1,2} = \left[(z-c_1)^2 X(z)\right]_{z=c_1} = \left[\frac{z+b}{(z-c_2)}\right]_{z=c_1} = \frac{c_1+b}{c_1-c_2}$
- $\frac{d}{dz}\left((z-c_1)^2 X(z)\right) = \left[\frac{d}{dz}\left(\lambda_{1,2} + \lambda_{1,1}(z-c_1) + (z-c_1)^2 \ \frac{\lambda_2}{z-c_2}\right)\right]$
- En prenant $z = c_1$: $\lambda_{1,1} = \left[\frac{d}{dz}\left((z-c_1)^2 X(z)\right)\right]_{z=c_1} = -\frac{c_2+b}{(c_1-c_2)^2}$

Suite pôle double

$\frac{z\, c_1}{(z-c_1)^2} \leftrightarrow n\, c_1^n \Upsilon_n$, donc

$\frac{1}{(z-c_1)^2} \leftrightarrow \frac{1}{c_1}(n-1)\, c_1^{n-1}\Upsilon_{n-1} = (n-1)\, c_1^{n-2}\Upsilon_{n-1}$

Finalement, on trouve que

$x_n = \lambda_{1,2}\,(n-1)\, c_1^{n-2}\Upsilon_{n-1} + \lambda_{1,1}\, c_1^{n-1}\Upsilon_{n-1} + \lambda_2\, c_2^{n-1}\Upsilon_{n-1}$, ou encore

$x_0 = 0$ et $x_n = \lambda_{1,2}\, c_1^{n-1} + \lambda_{1,1}\,(n-1)\, c_1^{n-2} + \lambda_2\, c_2^{n-1}$ pour $n \geq 1$

Remarquer de nouveau que $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty$ a lieu si et seulement si $|c_i| < 1$ pour $i = 1, 2$, voir propriété (7)

Filtrage des signaux causaux.

Filtre causal, i.e. la réponse impulsionnelle h est un signal causal, i.e. $h_n = 0$ si $n < 0$.

On met à l'entrée du filtre un signal causal u, et on appelle y le signal de sortie qui, par définition est le produit de convolution de u avec h. y est causal et du fait de la formule (6)

$$y_n = (h * u)_n = \sum_{k=0}^{n} h_k u_{n-k},\ n \geq 0 \tag{11}$$

En terme de transformée en z:

$Y(z) = H(z)U(z)$ où $H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k z^{-k}$ est la fonction de transfert du filtre.

Question importante: pour calculer y_n à chaque instant n via la formule (11), il semble qu'il faille en général effectuer n opérations. Ceci n'est évidemment pas envisageable. C'est la raison pour laquelle on ne considère en pratique que des filtres pour lesquels on peut calculer y_n à chaque instant n en faisant un nombre d'opérations indépendant de n. Ces filtres sont ceux dont la fonction de transfert $H(z)$ est rationnelle.

Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Ce sont les filtres pour lesquels tous les coefficients $(h_k)_{k \geq 0}$ au delà d'un certain entier K sont nuls: $h_k = 0$ si $k > K$.

Si $n \geq K$, l'équation (11) se met sous la forme:

$$y_n = (h * u)_n = \sum_{k=0}^{K} h_k u_{n-k},\ n \geq 0 \tag{12}$$

Le calcul de y_n nécessite donc $(K+1)$ opérations pour tout $n \geq K$. La fonction de transfert du filtre $H(z)$ est le polynôme de la variable z^{-1} donné par $H(z) = \sum_{k=0}^{K} h_k z^{-k}$, ce que l'on peut mettre sous la forme $H(z) = z^{-K} \left(\sum_{k=0}^{K} h_k z^{K-k} \right) = \frac{\sum_{k=0}^{K} h_k z^{K-k}}{z^K}$ qui est bien une fraction rationnelle de z.

Filtres récursifs à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Exemple simple: filtre d'ordre 1

$(u_n)_{n \geq 0}$ étant le signal causal d'entrée, on définit la sortie $(y_n)_{n \geq 0}$ comme le signal causal vérifiant pour tout instant $n \geq 0$ l'équation

$$y_n - a y_{n-1} = u_n \tag{13}$$

Comment calculer y_n pour chaque n ?

- Initialisation: pour $n = 0$, (13) donne $y_0 = u_0$ car $y_{-1} = 0$ du fait de la causalité de y.
- Pour $n = 1$, (13) donne $y_1 - a y_0 = u_1$, d'où $y_1 = a y_0 + u_1$.
- Pour $n = 2$, même chose, $y_2 = a y_1 + u_2$.
- $y_0, \ldots, y_{n-1}$ ayant été préalablement calculés, on évalue y_n par $y_n = a y_{n-1} + u_n$.
- Et on continue

A chaque instant n, le calcul de y_n nécessite donc de mettre en oeuvre 1 multiplication (celle de y_{n-1} par a) et une accumulation (ajouter u_n à ay_{n-1}). On convient souvent de considérer qu'une multiplication et une accumulation font une opération. On parle d'implémentation récursive.

En conclusion, il faut 1 opération pour calculer y_n pour chaque valeur de n.

Pourtant, nous allons voir dans le transparent suivant que la réponse impulsionnelle du filtre transformant u en y est la suite causale $h_k = a^k$ pour tout k. Dans ces conditions,

$y_n = \sum_{k=0}^{n} \; a^k u_{n-k}$

Si on calculait y_n directement comme cela, il faudrait à chaque instant n faire n opérations. L'implémentation récursive rend donc possible la mise en oeuvre pratique de ce filtre d'ordre 1.

Calcul de la fonction de transfert et de la réponse impulsionnelle

Comme $y_n = ay_{n-1} + u_n$ pour tout $n \geq 0$, la transformée en z du signal de gauche est égale à la transformée en z du terme de droite. En utilisant la propriété que la transformée en z du signal retardé d'une unité y_{n-1} est égale à $z^{-1}Y(z)$, on obtient que

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + U(z) \tag{14}$$

c'est-à-dire

$$Y(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} U(z) = \frac{z}{z-a} U(z) \tag{15}$$

On en déduit que

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Pour retrouver la réponse impulsionnelle, il faut développer $H(z)$ sous la forme $H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k z^{-k}$ pour $|z|$ assez grand. Ici, il est clair que
$\frac{1}{1-az^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k}$ si $|az^{-1}| < 1$, c'est-à-dire si $|z| > |a|$.
Par conséquent, $h_k = a^k$ pour tout $k \geq 0$.

Cas général

La sortie $(y_n)_{n\geq 0}$ est définie comme la suite causale vérifiant l'équation récursive $y_n + \sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k} = \sum_{l=0}^{q} b_l u_{n-l}$ Comment calculer y_n pour tout n ?

- Initialisation $y_0 = b_0 u_0$
- $y_1, \ldots, y_{n-1}$ ayant été calculé on évalue y_n par

$$y_n = -\left(\sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k}\right) + \sum_{l=0}^{q} b_l u_{n-l}$$

- La mise en oeuvre du filtre nécessite donc $p+q+1$ opérations

Fonction de transfert

On écrit que les transformées en z des signaux $(y_n + \sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k})_{n \geq 0}$ et $(\sum_{l=0}^{q} b_l u_{n-l})_{n \geq 0}$ coïncident.

On obtient la généralisation de (15):

$$Y(z) + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^{q} b_l z^{-l} U(z) \tag{16}$$

ce qui donne

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

avec

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{q} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

$H(z)$ est bien une fraction rationnelle de z^{-1}, donc de z. En conclusion:

Les filtres que l'on implémente en pratique sont ceux dont la fonction de transfert $H(z)$ est rationnelle.

Stabilité des filtres

Définition 1 *On dit qu'un filtre est stable si tout entrée bornée produit une sortie bornée.*

En pratique, tout filtre doit être stable. Sinon, mathématiquement, il existerait des entrées bornées générant des sorties que ne le sont pas. Par exemple, si on considère le filtre récursif d'ordre 1 $y_n = a y_{n-1} + u_n$ avec $a > 1$, nous avons vu que $y_n = \sum_{k=0}^{n} a^k u_{n-k}$. Si l'entrée est $u_n = \Upsilon_n$, qui, bien sur, est bornée, la sortie y_n à chaque instant n est donnée par $y_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ qui tend vers l'infini. En pratique, le processeur qui va calculer y_n ne générera évidemment pas un signal tendant vers l'infini car des phénomènes d'écrêtage vont apparaître: les processeurs manient des mots binaires dont le nombre de bits, disons N_b, est fixe. Cela veut dire que le nombre maximum représentable par le processeur est 2^{N_b}. Toute quantité mathématiquement plus grande que 2^{N_b} sera écrêtée à 2^{N_b}. Cela signifie qu'en pratique, dans le cadre de cet exemple, le filtre va calculer $\max(y_n, 2^{N_b})$. Cela veut dire qu'un filtre instable peut produire des signaux non conformes aux équations mathématiques qui le définisse.

Caractérisation de la stabilité.

Résultat 1 *Un filtre de réponse impulsionnelle $(h_k)_{k \geq 0}$ est stable si et seulement si $\sum_{k=0}^{+\infty} |h_k| < +\infty$*

La propriété (7) implique donc le critère de stabilité important suivant:

Résultat 2 *Un filtre de réponse impulsionnelle $(h_k)_{k \geq 0}$ dont la fonction de transfert $H(z)$ est rationnelle est stable si et seulement si tous les pôles (c_i) de $H(z)$ sont de modules strictement plus petit que 1.*

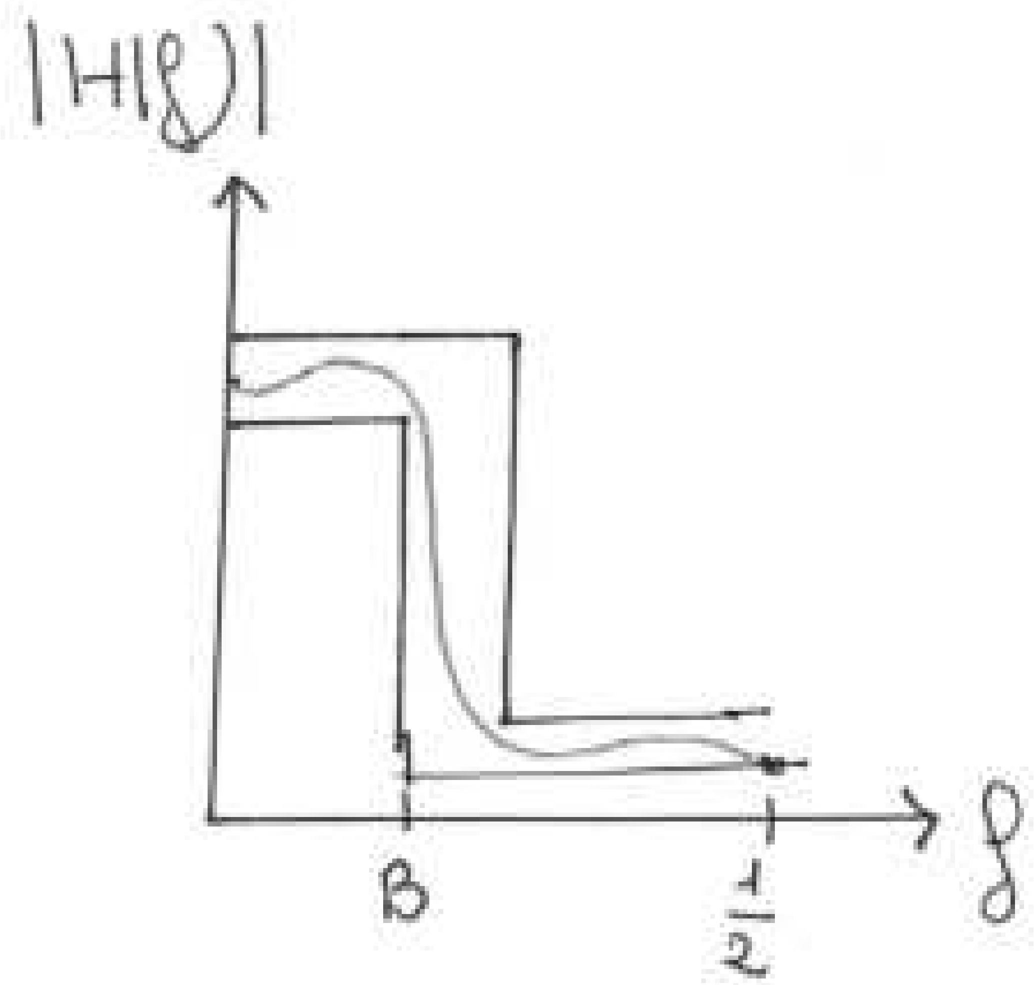
Par exemple, si $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, le filtre est stable si et seulement si $|a| < 1$.

Notions sur la synthèse filtres numériques.

Dans ce contexte, on cherche un filtre numérique dont la fonction de transfert $H(z)$ est rationnelle.

Il s'agit de trouver $H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{q} b_l z^{-l}}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$ de façon à ce que:

- $H(z)$ soit un filtre stable
- $|H(f)| = |H(e^{2i\pi f})|$ soit conforme à un gabarit
- Exemple de gabarit pour un filtre passe-bas de fréquence de coupure B.


|H(f)|
B
1/2
f

Logiciels existants

Nombreux logiciels existants pour résoudre des problèmes de ce type:

- Algorithmes d'optimisation
- Déterminent p, q et les coefficients

On peut choisir a priori d'utiliser des filtres RII ou FIR $(H(z) = \sum_{k=0}^{K} h_k z^{-k})$.

- Choix FIR: filtre automatiquement stable, possibilité d'avoir une phase linéaire (voir plus loin), mais pour un gabarit donné, la valeur de K peut être beaucoup plus grande que $p+q+1$ si on utilise un filtre RII récursif. La complexité de mise en oeuvre peut être plus importante.
- Choix RII: pour un gabarit donné, permet d'avoir $p+q+1$ pas trop grand, donc complexité de mise en oeuvre raisonnable. Le contrôle de la stabilité peut être problématique pour tout un tas de raisons

Filtres à phase linéaire.

Motivation Prenons un filtre passe-bas de fréquence de coupure B respectant le gabarit précédent. On aimerait que ce filtre ne distorde pas un signal u dont la bande passante est l'intervalle $[0, B]$ (c'est-à-dire un signal dont la transformée de Fourier $U(f)$ est nulle si $f > B$). En travaillant en transformée de Fourier, cela voudrait dire que

$$U(f) \simeq H(f)U(f) = |H(f)|U(f)\mathrm{Arg}(H(f))$$

pour tout $f \in [0, 1/2]$. Comme la bande passante de u est $[0, B]$ et que $|H(f)| \simeq 1$ si pour tout $f \in [0, B]$, on peut dire que $|H(f)|U(f) \simeq U(f)$. Par conséquent, on aimerait que

$$U(f) \simeq U(f)\mathrm{Arg}(H(f))$$

condition réalisée si $\mathrm{Arg}(H(f)) \simeq 1$ pour tout $f \in [0, B]$. Cette condition introduit une condition beaucoup trop forte, très difficile à approcher en pratique. Dans ces conditions, le signal de sortie du filtre va être en général une version très distordue de u.

Filtres à phase linéaire.

Définition 2 *On dit qu'un filtre de fonction de transfert $H(f)$ est à phase linéaire si $\mathrm{Arg}(H(f)) = -2\pi P f$ pour tout f, où P est un entier.*

Si notre filtre $H(f)$ est à phase linéaire,

$$|H(f)| U(f) \mathrm{Arg}(H(f)) \simeq U(f) e^{-2i\pi P f}$$

En d'autres termes, lorsque l'on fait passer le signal u dans le filtre, le signal de sortie va être à peu près le signal u retardé de P unité de temps. Cette distorsion n'est absolument pas génante en pratique.

Comment réaliser un filtre à phase linéaire ?

Prendre un filtre RIF $H(z) = \sum_{k=0}^{2P} h_k z^{-k}$ dont les coefficients vérifient la condition de symétrie

$$h_{P+1} = h_{P-1}, h_{P+2} = h_{P-2}, \ldots, h_{2P} = h_0$$

c'est-à-dire $h_{2P-k} = h_k$ pour tout $k = 0, \ldots, 2P$.

On peut voir sans trop de peine que

$$H(f)e^{2i\pi Pf} = h_P + 2\sum_{k=1}^{P} h_{P-k} \cos(2\pi k f)$$

Par conséquent, $H(f)e^{2i\pi Pf}$ est un réel. Si ce réel est positif pour tout f, c'est-à-dire si

$$h_P + 2\sum_{k=1}^{P} h_{P-k} \cos(2\pi k f) \geq 0$$

pour tout f, alors, $|H(f)| = h_P + 2\sum_{k=1}^{P} h_{P-k} \cos(2\pi k f)$ et $\mathrm{Arg}(H(f)) = -2i\pi P f$.